



LUIS ENRIQUE OLEA OSUNA

MANUAL

DE

A **L** **G** **E** **B** **R** **A**

MATERIAL DE APOYO PARA ALUMNOS Y PROFESORES

$$a - b = a + \langle - b \rangle$$



MANUAL DE ÁLGEBRA

Material de apoyo para alumnos y profesores

M. LUIS ENRIQUE OLEA OSUNA

luis.olea@lasallenoroeste.edu.mx

Profesor de tiempo completo adscrito al

Área de Ingeniería y Tecnología de la Universidad La Salle Noroeste



Manual de álgebra / Luis Enrique Olea Osuna. – México : Publicar al Sur 2025.

154 p. : il.

Incluye bibliografía.

ISBN Publicar al Sur: 978-607-99260-5-2

ISBN Publicar al Sur obra completa: 978-607-99260-4-5

ISBN Universidad la Salle Noroeste, A.C.: 978-607-26897-2-5

ISBN obra completa Universidad la Salle Noroeste, A.C.: 978-607-26897-1-8

1. Álgebra-Libros de texto

CDD: 512.07

LCC: QA154.3

Luis Enrique Olea Osuna

Manual de álgebra

Primera edición: julio del 2025.

© Derechos reservados por el autor

D. R. © 2025 Sello Editorial Publicar al Sur ®

Publicar al Sur, Calle Xaxalco Mz5 lt4 San Miguel

Topilejo, Tlalpan, Ciudad de México, c. p. 14500.

El dominio en la Web es www.publicaralsur.com

Usuario del registro nacional de editores:

Pis200305196

Número de Orcid de la editorial:

0009-0004-4603-908X

Este libro se publica luego de un dictamen por el sistema de doble enmascaramiento (“doble ciego”), según los criterios vigentes en la política editorial actual.

Diseño y cubierta: Equipo editorial de Publicar al Sur

Impreso en México / Printed in Mexico

CONSEJO EDITORIAL

DR. MAURICIO BEUCHOT PUENTE

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), México

DR. SIXTO CASTRO SANTILLÁN

Universidad de Valencia, España

DR. RAFAEL ROBERTO CÚNSULO

Universidad del Norte Santo Tomás de Aquino, Tucumán, Argentina

MTRA. BARBARA ESMENIA PACHECO DA SILVA

Red Magdalenas Internacional - Teatro de las Oprimidas, São Paulo, Brasil

DRA. PATRICIA GANEM ALARCÓN

Secretaría de Educación Pública y Grupo “Loga Escuelas en Red”, México

DR. JEAN GRONDIN

Universidad de Montreal, Canadá

DRA. SIOBHAN FENELLA GUERRERO MC MANUS

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Centro de Investigaciones Interdisciplinarias en Ciencias y Humanidades (CIICH), México

DRA. CLAUDIA PONTÓN RAMOS

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación, México

DR. LUIS PORTER GALETAR

Profesor jubilado de la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM)-Xochimilco, México

DR. ALBERTO SANEN LUNA

Hospital Psiquiátrico Infantil Dr. Juan N. Navarro, México

ALGEBRA

LOS NÚMEROS REALES Y SUS PROPIEDADES FUNDAMENTALES

LA RECTA DE LOS NÚMEROS REALES	9
ORDEN Y NOTACIÓN DE INTERVALO	9

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON POLINOMIOS

PROPIEDADES BÁSICAS DEL ÁLGEBRA	11
RESTA	11
DIVISIÓN	12
INVERSO ADITIVO	13
EXPONENTES ENTEROS	13
POLINOMIOS	15
TÉRMINOS SEMEJANTES, SUMA Y RESTA ALGEBRAICA	15
MULTIPLICACIÓN	17
DIVISIÓN	17

EXPONENTES Y RADICALES

21

RACIONALIZACIÓN

22

PRODUCTOS NOTABLES

23

CUADRADO DE UN BINOMIO	23
PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CONJUGADOS	23
CUBO DE UN BINOMIO	24
PRODUCTO DE DOS BINOMIOS DEL TIPO $(AX+B)(CX+D)$	24

PRODUCTO DE UN BINOMIO POR UN TRINOMIO DEL TIPO $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$	25
TEOREMA DEL BINOMIO	25

FACTORIZACIÓN

FACTORIZACIÓN DE UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS	26
FACTORIZACIÓN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS	27
FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS	27
FACTORIZACIÓN DE SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS	28

FRACCIONES ALGEBRAICAS

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LAS FRACCIONES	29
SIGNOS EN LAS FRACCIONES	29
REDUCCIÓN O SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES	29
MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES	30
DIVISIÓN DE FRACCIONES	31
SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS	31
FRACCIONES COMPLEJAS	33

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

34

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES	35
PROBLEMAS DE APLICACIÓN QUE SE PUEDEN MODELAR CON ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA	36

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS	38
MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR SUMA Y RESTA	38
MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR SUSTITUCIÓN	39
MÉTODO DE CRAMER POR DETERMINANTES	40

APLICACIONES DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS	42
MÉTODO DE REDUCCIÓN POR SUMA Y RESTA	43
MÉTODO DE REDUCCIÓN POR SUSTITUCIÓN	45
MÉTODO DE CRAMER (DETERMINANTES) PARA TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS	46
EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE SISTEMAS DE TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS	47

ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA

MÉTODO DE FACTORIZACIÓN	49
COMPLETANDO EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO	51
FÓRMULA GENERAL	52
APLICACIONES DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA	55

SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

SISTEMA FORMADO POR UNA ECUACIÓN LINEAL Y UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA	56
SISTEMA FORMADO POR DOS ECUACIONES DEL TIPO $AX^2 \pm BY^2 = C$	57
OTROS SISTEMAS QUE SE PUEDEN RESOLVER POR SUMA Y RESTA	58
PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRÁTICAS	59
ECUACIONES QUE CONTIENEN RADICALES DE SEGUNDO ORDEN	60

DESIGUALDADES O INECUACIONES

REGIONES EN EL PLANO	63
PRINCIPIOS FUNDAMENTALES	64
SOLUCIÓN DE DESIGUALDADES CONDICIONALES O INECUACIONES	64
DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO	65
DESIGUALDADES DE SEGUNDO GRADO	66
DESIGUALDADES RACIONALES	69
PROBLEMAS DE APLICACIÓN E INECUACIONES POLINOMIALES, CON VALOR ABSOLUTO Y RACIONALES	71

TRIGONOMETRÍA

SISTEMA SEXAGESIMAL	72
SISTEMA CIRCULAR	73
ÁNGULOS TÍPICOS Y PARES COMUNES DE ÁNGULOS	74
DOS RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL	76

TRIÁNGULOS, CLASIFICACIÓN

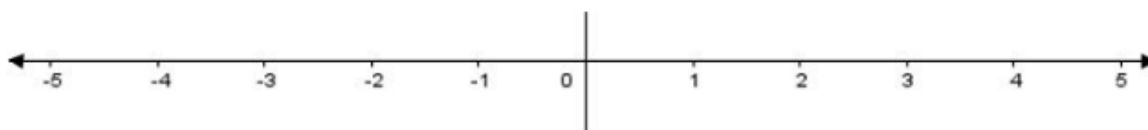
ALGUNAS PROPIEDADES RELEVANTES	79
TEOREMA DE PITÁGORAS	81

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	81
SIGNOS Y VALORES DE LAS FUNCIONES EN LOS CUADRANTES	83
VALORES DE LAS FUNCIONES PARA ÁNGULOS DE CUADRANTE (0° , 90° , 180° Y 270°)	84
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES (30° , 45° Y 60°)	85
DADA UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA, HALLAR EL ÁNGULO	88
SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS	
PROBLEMAS EN LOS QUE SE CONOCE UN LADO Y UN ÁNGULO	91
PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS	93
PROBLEMAS DE APLICACIÓN	96
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS	98
LEY DE LOS SENOS	99
EJEMPLOS DE APLICACIÓN	101
LEY DE LOS COSENOS	102
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES	
RELACIONES POR COCIENTE O DIVISIÓN	105
RELACIONES PITAGÓRICAS	106
GEOMETRÍA ANALÍTICA	
EL PLANO CARTESIANO	113
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS	114
DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA	120
PENDIENTE DE UNA RECTA	125
ÁNGULO ENTRE RECTAS	127
ECUACIÓN DE LA RECTA	
FORMA PUNTO-PENDIENTE	128
FORMA PENDIENTE-ORDENADA EN EL ORIGEN	129
FORMA ABCISA Y ORDENADA EN EL ORIGEN O FORMA SIMÉTRICA DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA	131
FORMA NORMAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA	132
CÓNICAS	134
CIRCUNFERENCIA	135
LA PARÁBOLA	139
ÉLIPSE	144
HIPÉRBOLA	149

LOS NÚMEROS REALES Y SUS PROPIEDADES FUNDAMENTALES

LA RECTA DE LOS NÚMEROS REALES

Los números reales pueden representarse al identificar la posición sobre la que se localizan en una recta horizontal en relación con un punto "O" u origen. Los números situados **a la derecha** se consideran **positivos** y **a la izquierda negativos**, como se muestra en la figura. Video explicativo en el siguiente enlace: <https://www.youtube.com/watch?v=xOjQ3u7jSLQ>



El número asociado con un punto es la coordenada del punto y usualmente usamos el número real para nombrar el punto y para definir su coordenada.

ORDEN Y NOTACIÓN DE INTERVALO

El conjunto de los números reales está ordenado. Eso quiere decir que podemos comparar dos números reales cualesquiera que no sean iguales y decir que uno es "menor que" o "mayor que" otro.

Orden de los números reales		
Si a y b son dos números reales cualesquiera.		
Símbolo	Definición	Interpretación
$a > b$	$a - b > 0$, es positivo	<i>a es mayor que b ; está a la derecha</i>
$a < b$	$a - b < 0$, es negativo	<i>a es menor que b ; está a la izquierda</i>
$a \geq b$	$a - b$ es positivo o cero	<i>a es mayor o igual a b</i>
$a \leq b$	$a - b$ es negativo o cero	<i>a es menor o igual a b</i>
Los símbolos $>, <, \geq, \leq$ son símbolos de desigualdades .		

Ejemplo 1: diversas formas de representación de un intervalo

Describe y grafique el intervalo de los números reales de la desigualdad:

a) $x < 3$



$(-\infty, 3)$

b) $-1 < x \leq 4$



$(-1, 4]$

Se dice que **un intervalo es acotado cuando tiene definidos sus límites.**

Notación de intervalo	Tipo de intervalo	Desigualdad
$[a, b]$	Cerrado	$a \leq x \leq b$
(a, b)	Abierto	$a < x < b$
$[a, b)$	Semiabierto (derecha)	$a \leq x < b$
$(a, b]$	Semiabierto (izquierda)	$a < x \leq b$
<i>Los números a y b son los extremos de cada intervalo</i>		

Se dice que un intervalo es **no acotado** cuando **no está definido uno de sus extremos o ambos.**

Notación de intervalo	Tipo de intervalo	Desigualdad
$[a, \infty)$	Cerrado	$x \geq a$
(a, ∞)	Abierto	$x > a$
$(-\infty, b]$	Cerrado	$x \leq b$
$(-\infty, b)$	Abierto	$x < b$
<i>Cada intervalo tiene un extremo a o b</i>		

Ejemplo 2: expresar de diversas formas un intervalo

Convierta de notación de intervalos a notación de desigualdades, o viceversa. Determine los extremos e indique si el intervalo es acotado o no y su tipo; grafique el intervalo.

- a) $[-6,3)$
- b) $(-\infty,-1)$
- c) $-2 \leq x \leq 3$

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON POLINOMIOS

PROPIEDADES BÁSICAS DEL ÁLGEBRA

El álgebra implica usar letras y otros símbolos para representar números reales. Una **variable** es una letra o símbolo que **representa un número real no especificado**. Por ejemplo x, y, z, θ . Normalmente se utilizan las últimas letras del alfabeto.

Una **constante** es una letra o símbolo que **representa un número real específico**. Por ejemplo $3, -1, \sqrt{5}, \pi, a$. Normalmente si se usan letras, son las primeras del alfabeto.

Una **expresión algebraica** es una combinación de variables y constantes que involucran operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces. Los **términos** están separados por suma o resta y por su cantidad se puede clasificar a las expresiones como monomio, binomio, trinomio o polinomio de más de tres términos.

RESTA

$$a - b = a + (-b)$$

En álgebra, **restar implica sumar el inverso aditivo** (es el número con el signo contrario). El inverso aditivo no siempre es negativo.

DIVISIÓN

$$\frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right), b \neq 0$$

En álgebra, **dividir por b implica multiplicar por su recíproco**.

Recordando que las variables y expresiones algebraicas pueden representar números reales, se pueden aplicar las propiedades de los números reales para las operaciones algebraicas.

Propiedades algebraicas	
Sean u, v y w números reales, variables o expresiones algebraicas.	
1. Propiedad conmutativa Suma: $u + v = v + u$ Multiplicación: $uv = vu$	4. Propiedad del inverso Suma: $u + (-u) = 0$ Multiplicación: $u \cdot \frac{1}{u} = 1, u \neq 0$
2. Propiedad asociativa Suma: $(u + v) + w = u + (v + w)$ Multiplicación: $(uv)w = u(vw)$	5. Propiedad distributiva Multiplicación sobre la suma: $u(v + w) = uv + uw$ $(u + v)w = uw + vw$ Multiplicación sobre la resta: $u(v - w) = uv - uw$ $(u - v)w = uw - vw$
3. Propiedad de identidad Suma: $a + 0 = a$ Producto: $u \cdot 1 = u$	

Los miembros izquierdos de las ecuaciones que ilustran la propiedad distributiva muestran la **forma factorizada** de las expresiones algebraicas, y los miembros derechos muestran la **forma desarrollada**.

Ejemplo 1: aplicación de las propiedades de los números reales en álgebra

a) Escriba la forma desarrollada de $(x - 2y + z)w$

$$(x - 2y + z)w = wx - 2wy + wz$$

El factor "w" se distribuye en todos los términos del polinomio.

b) Escriba la forma factorizada de $3x - 3by + 3$

$$3x - 3by + 3 = 3(x - by + 1)$$

El factor que se encontraba distribuido en todos los términos es 3, ese el factor común.

En resumen, si hay un producto indicado generalmente se efectúa y si inicialmente se tiene un polinomio con un factor común, se puede expresar como un producto.

INVERSO ADITIVO

Propiedades del inverso aditivo	
Sean u y v números reales, variables o expresiones algebraicas.	
Propiedad	Ejemplo
1. $-(-u) = u$	$-(-5) = 5$
2. $(-u)v = u(-v) = -(uv)$	$(-4)(3) = (4)(-3) = -(4 \cdot 3) = -12$
3. $(-u)(-v) = uv$	$(-3)(-5) = (3)(5) = 15$
4. $(-1)u = -u$	$(-1)7 = -7$
5. $-(u+v) = (-u) + (-v)$	$-(3+5) = (-3) + (-5) = -8$

EXPONENTES ENTEROS

Se usa la notación exponencial para escribir en forma resumida el producto de factores que se repiten.

$$(-3)(-3)(-3)(-3) = (-3)^4 \text{ y } (2x+2)(2x+2)(2x+2) = (2x+2)^3$$

Notación exponencial
Sea a un número real, variable o expresión algebraica y n un entero positivo. Entonces:
$a^n = a \cdot a \cdot a \dots \cdot a, \text{ } n \text{ veces}$
Donde n es el exponente, a es la base y a^n (se lee como "a a la n") es la n-ésima potencia de a .

Ejemplo 1: diferenciar los elementos de una expresión exponencial

Identificar la base y la potencia en cada ejercicio.

a) $(-5)^3 = -125$

La base es -5 , la potencia es 3 . Hay que multiplicar -5 tres veces por si mismo.

b) $-5^3 = -125$

La base es 5 , la potencia es 3 . Hay que multiplicar 5 tres veces por si mismo y cambiar signo.

c) $(-2a)^2 = 4a^2$

La base es $-2a$, la potencia es 2. Hay que multiplicar $-2a$ dos veces por si mismo.

Propiedades de los exponentes	
Sean u y v números reales, variables o expresiones algebraicas, y sean m y n enteros. Se supone que todas las bases son distintas de cero.	
Propiedad	Ejemplo
1. $u^m u^n = u^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$
2. $\frac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$	$\frac{y^7}{y^3} = y^{7-3} = y^4$
3. $u^0 = 1$	$6^0 = 1$
4. $u^{-n} = \frac{1}{u^n}$	$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$
5. $(uv)^n = u^n \cdot v^n$	$(2b)^5 = 2^5 b^5 = 64b^5$
6. $(u^m)^n = u^{m \cdot n}$	$(3x^3)^3 = 3^3 \cdot x^{3 \cdot 3} = 27x^9$
7. $\left(\frac{u}{v}\right)^n = \frac{u^n}{v^n}$	$\left(\frac{2}{x}\right)^3 = \frac{2^3}{x^3} = \frac{8}{x^3}$

Ejemplo 2: aplicación de las propiedades de los exponentes

Simplificar.

a) $(2ab^3)(5a^2b^2) = 10a^3b^5$

b) $\frac{u^2v^{-2}}{u^{-1}v^3} = \frac{u^{2+1}}{v^{3+2}} = \frac{u^3}{v^5}$

c) $\left(\frac{x^2}{2}\right)^{-3} = \frac{x^{-6}}{2^{-3}} = \frac{2^3}{x^6} = \frac{8}{x^6}$

Material adaptado tomando como base la obra de: Demana, W. F. (2014). *Matemáticas Universitarias Introductorias*. México: Pearson.

POLINOMIOS

Ya definimos el concepto de álgebra, de variable, de constante, de expresión y polinomio. Sin embargo, vamos a invertir un poco de tiempo en comprender mejor el significado de variable y la conveniencia de tener variables para describir o modelar fenómenos matemáticamente.

Un polinomio es un solo término o bien la suma de dos o más términos que incluyen variables con exponentes que son números enteros o no. Los términos están separados por sumas y/o restas.

Las ecuaciones que tienen polinomios se usan en áreas tan diversas como la geometría, la economía, física y otras ciencias, la medicina, la psicología y muchas otras más. La siguiente expresión algebraica, por ejemplo, es para calcular el volumen de un cono:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Es un polinomio de un término, con dos constantes $\frac{1}{3}y\pi$, dos variables r (radio) y h (altura).

Esto significa que el volumen de un cono cualquiera, depende o está en función de su radio y de su altura. Las variables permiten los cambios y si no fuera por ellas, sería como decir que todos los conos tendrían que ser idénticos.

El grado del polinomio lo define la potencia mayor de todos los términos. El grado de cada término se define por el exponente de la variable y si hay un producto de más de una variable, entonces se define por la suma de los exponentes de las variables.

Ejemplo 1: clasificación de un polinomio por su potencia o exponente

a) $y = 5x^2 - 3x + 3$, es un **polinomio de segundo grado** porque el primer término es cuadrático (tiene exponente 2). También tiene un término de grado 1 (el segundo término) y otro de grado 0 (el tercer término).

b) $0 = 5x^2y - 3xy + 4$, es una ecuación con un **polinomio de tercer grado** (el primer término es cúbico o de tercer grado: x^2y^1 ; $2+1=3$). El segundo término es cuadrático o de grado 2 (x^1y^1 ; $1+1=2$) y el tercer término es de grado 0. No tiene término de grado 1.

TÉRMINOS SEMEJANTES, SUMA Y RESTA ALGEBRAICA.

Son los términos que tienen idéntica su parte variable. Son semejantes los siguientes términos:

$$3x^2y, -5x^2y, \frac{2}{3}x^2y, -abx^2y$$

Noten que solamente cambian los coeficientes, es decir, solo se tienen diferentes cantidades de lo mismo; siempre es $x^2 y$.

Para sumar algebraicamente, basta con reducir los coeficientes de los términos semejantes.

Ejemplo 2: suma algebraica de términos semejantes

a) Sumar: $-9x^3 + 14x^3 = (-9 + 14)x^3 = 5x^3$

b) $(-9x^3 + 7x^2 - 5x + 3) + (13x^3 + 2x^2 - 8x - 6)$
 $= (-9 + 13)x^3 + (7 + 2)x^2 + (-5 - 8)x + (3 - 6)$
 $= 4x^3 + 9x^2 - 13x - 3$

c) Sumar $7x^3 - 8x^2 + 9x - 6$ con $-2x^3 - 3x^2 + 2$
 $+7x^3 - 8x^2 + 9x - 6$
 $= \frac{-2x^3 - 3x^2 + 0x + 2}{5x^3 - 11x^2 + 9x - 4}$

En álgebra, restar, a diferencia de sumar, implica cambiar el signo del sustraendo y luego reducir; no hay resta si no hay cambio de signo.

Ejemplo 3: resta algebraica

a) $(5a^2 - 6ab + 3b^2) - (a^2 + ab - 2b^2) = 5a^2 - 6ab + 3b^2 - a^2 - ab + 2b^2$
 $= (5 - 1)a^2 + (-6 - 1)ab + (-2 + 2)b^2 = 4a^2 - 7ab$

b) Restar $-\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$ de $2x^2 + x - \frac{2}{5}$
 $= \left(2x^2 + x - \frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right) = 2x^2 + x - \frac{2}{5} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$
 $= \left(2 + \frac{3}{4}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x + \left(-\frac{2}{5} - 3\right) = \frac{11}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{17}{5}$

MULTIPLICACIÓN

La multiplicación algebraica se efectúa haciendo uso de las propiedades de los exponentes:

$$(5x^2y^3)(-3xy^3) = -5 \cdot 3x^{2+1}y^{3+3} = -15x^3y^6$$

Se usa la propiedad distributiva para multiplicar un monomio por un polinomio:

$$3x^4(2x^3 - 7x + 3) = 6x^7 - 21x^5 + 9x^4$$

$$(2x - 3)(3x^2 + 4x - 5) = 6x^3 + 8x^2 - 10x - 9x^2 - 12x + 15 = 6x^3 - x^2 - 22x + 15$$

DIVISIÓN

El caso fundamental es cuando se tiene que dividir un monomio entre otro. En primera instancia es recomendable escribir primero el signo que tendrá el resultado considerando las mismas reglas que en la multiplicación. Posteriormente se reducen los coeficientes numéricos si tienen factores en común, por lo que se recomienda descomponer tanto el numerador como el denominador en sus factores primos y finalmente hacer lo mismo con los factores algebraicos usando las leyes de los exponentes y con el criterio de que en el resultado definitivo los exponentes deben ser positivos.

Hay que recordar que cuando se multiplica una cantidad por su recíproco o inverso, el resultado es 1 y que 1 es neutro multiplicativo (es un factor que no tiene efecto al multiplicar).

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Ejemplos 1 y 2: división entre dos monomios

$$\frac{24x^3y^2z}{36x^2y^3z} = \frac{(2)(2)(2)(3)x^3y^2z}{(2)(2)(3)(3)x^2y^3z} = \frac{2x^{3-2}}{3y^{3-2}} = \frac{2x}{3y}$$

$$\frac{50x^{2a}y^2}{75x^3y^az^2} = \frac{(2)(5)(5)x^{2a}y^2}{(3)(5)(5)x^3y^az^2} = \frac{2x^{2a-3}y^{2-a}}{3z^2}$$

Ejemplo 3: división de polinomio entre monomio

$$15x^3y^2 + 20x^2y^3 - 10xy \text{ entre } -25xy^2$$

Para resolver hay que recordar que en aritmética se sumaban fracciones con el denominador común y ahora podemos aplicar esta propiedad a la inversa y separar en fracciones con el mismo denominador:

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{d}$$

$$= \frac{15x^3y^2 + 20x^2y^3 - 10xy}{-25xy^2} = -\frac{15x^3y^2}{25xy^2} - \frac{20x^2y^3}{25xy^2} + \frac{10xy}{25xy^2} = -\frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{5}xy + \frac{2}{5y}$$

El último caso de división corresponde a dividir un polinomio entre otro. En este caso no funciona el separar en varias divisiones como en el caso anterior. Un procedimiento útil para dividir un polinomio de grado mayor al del divisor puede ser el siguiente:

1. Ordenar el dividendo y el divisor de exponente mayor a menor con respecto a la variable que se va a efectuar la división.
2. Dividir el primer término del dividendo entre el primero del divisor para obtener el primer término del cociente.
3. Obtener el residuo que resulta de multiplicar el término del cociente por el divisor y restar del dividendo; recuerde que restar implica cambio de signo antes de reducir. Aquí queda un nuevo dividendo.
4. Si el exponente del dividendo es igual o mayor que el del divisor, se repiten los pasos 2 y 3 hasta que el residuo tenga un exponente menor al del divisor (ya no lo contiene). Si no queda un residuo la división es exacta, es decir el cociente multiplicado por el divisor es exactamente el dividendo.

Para comprender mejor es necesario ver algunos ejemplos:

Ejemplo 4: división exacta de polinomio entre polinomio

$$\frac{2x^2 - 11x + 12}{x - 4} ; 2x^2 - 11x + 12 \mid x - 4$$

Primero se divide $2x^2$ entre x , para obtener el primer término del resultado o cociente:

$$2x^2 - 11x + 12 \quad \mid x - 4 \quad x$$

$$2x$$

Luego **se multiplica este término por el divisor y se resta** al dividendo:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 11x + 12 \quad \mid x - 4 \\ -2x^2 + 8x \quad \quad \quad 2x \\ \hline -3x + 12 \end{array}$$

Como el exponente del residuo todavía permite dividir entre el divisor, se repite el proceso:

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 11x + 12 \quad \lfloor x - 4 \\
 \underline{-2x^2 + 8x} \quad \quad 2x - 3 \\
 -3x + 12 \\
 \underline{+3x - 12} \\
 \underline{\quad 0}
 \end{array}$$

Dividir $2x^2 - 11x + 12$ entre $x - 4 = 2x - 3$ porque $(x - 4)(2x - 3) = 2x^2 - 11x + 12$

Ejemplo 5: división no exacta de dos polinomios

Dividir $3x^2 - 2x - 2$ entre $x - 2$

$$\begin{array}{r}
 3x^2 - 2x - 2 \quad \lfloor x - 2 \\
 \underline{-3x^2 + 6x} \quad \quad 3x + 4 \\
 4x - 2 \\
 \underline{-4x + 8} \\
 6
 \end{array}$$

$$3x^2 - 2x - 2 \text{ entre } x - 2 = 3x + 4 + \frac{6}{3x^2 - 2x - 2}$$

Practica 1: operaciones fundamentales con polinomios

1. Si $A = 5x^2 + 8x + 3$ y $B = 2x^2 + 7x + 13$, hallar :

- a) $A + B$
- b) $A - B$
- c) $B - A$

2. $(m^2 + 6) + (-4m^2 + 7m + 2) =$

3. Restar $5y^2 - 6y - 11$ de $6y^2 + 2y + 5$

4. A $2y^2 + 7y + 11$, restarle $8y^2 - 5y + 7$

5. $-38h^5 + 6h^5 =$

6. $15ab - 26ab + 7ab =$

7. $28m - 39m^2 - 46m + 87m^2 =$

8. $\frac{8}{3}w^4 + \frac{7}{3}w^4 - \frac{5}{3}w^4 =$

9. $x^2 - 56x - 17x + 8x^2 =$

10. $\frac{4}{5}k + \frac{1}{8}k =$

11. $(3x + 4xy + 7x^2y + 5xy^2) + (-6x^2y - 2xy + 9xy^2 + 8x) =$

12. $(2x^2 - (x - (2x + 5) + 2x^2 - (-x + 3))) =$

13. $2(3x - 2y + 5) - 3(5 - 2x + 3y) =$

14. $(3x - 2)(5x + 3) =$

15. $(x^2 - 2y^3)(x^4 + 2x^2y^3 + 4y^3) =$

16. $(x^3y^az^{b+1})(x^3y^{3a}z^{2-3b})^2 =$

17. $5ab^2c^3$ entre $15a^2b^2c^{-2} =$

18. Dividir $6a^2b^3c^3 + 8a^{-1}b^{\frac{1}{2}}c - 12a^3b^2$ entre $24ab^2c^2$

19. Dividir $4x^3 - 14x^2 + 16x - 8$, entre $2x - 4$

20. $27x^3 - 8$ entre $3x - 2$

EXPONENTES Y RADICALES

Raíz n-ésima principal

Partiendo de que x es un número real y $n \geq 2$ es un entero positivo.

i) Si $x > 0$, entonces la **raíz n-ésima principal** $\sqrt[n]{x}$ es el número r *positivo* tal que $x = r^n$.

ii) Si $x < 0$ y n es un entero positivo impar, entonces la **raíz n-ésima principal** $\sqrt[n]{x}$ es un número r *negativo* tal que $x = r^n$.

iii) Si $x < 0$ y n es un entero positivo par, entonces $\sqrt[n]{x}$ no es un número real.

iv) Si $x = 0$, entonces $\sqrt[n]{x} = 0$.

Ejemplos: simplificación de radicales con radicando entero o racional

$$1. \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

$$2. \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$$

$$3. \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \sqrt[4]{\frac{2^4}{3^4}} = \frac{2}{3}$$

Leyes de los radicales

Sean n y m enteros positivos, y x y y números reales. Entonces:

$$i) \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$

$$ii) \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & \text{si } n \text{ es impar} \\ |x|, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$iii) \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$$

$$iv) \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$v) \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

Ejemplo: reducción de radicales compuestos

$$1. \sqrt[3]{\sqrt{7}x^{42}} = \sqrt[21]{x^{42}} = x^{\frac{42}{21}} = x^2$$

$$2. \sqrt[6]{x^3} = x^{\frac{3}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

3. $\sqrt{\frac{x^2}{25}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{x}{5}$
4. $\sqrt[3]{27y^6} = \sqrt[3]{3^3} \sqrt[3]{y^6} = 3y^2$
5. $\sqrt[3]{81a^3b^5c^6} = \sqrt[3]{3b^2} \cdot \sqrt[3]{3^3 a^3 b^3 c^6} = 3bc^2 \sqrt[3]{3b^2}$
6. $(\sqrt[5]{r} \sqrt[5]{s})^5 = (\sqrt[5]{rs})^5 = rs$

RACIONALIZACIÓN

Cuando quitamos los radicales del numerador o del denominador de una fracción, decimos que estamos racionalizando. En álgebra normalmente racionalizamos el denominador, pero en cálculo es a veces importante racionalizar el numerador. El procedimiento de racionalización implica la multiplicación de la fracción por el factor neutro 1 escrito en forma especial.

Ejemplos de racionalización de denominadores con monomios y con polinomios

1. $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
2. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
3. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
4. $\frac{1}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x-3}}{x-9}$
5. $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}]} = \frac{x+h-x}{h[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}]}$
 $= \frac{h}{h[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}]} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

PRODUCTOS NOTABLES

CUADRADO DE UN BINOMIO

“El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más o menos (según sea el signo), el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo.”

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

1. $(x+3)^2 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 = x^2 + 6x + 9$
2. $(2x+5)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5) + (5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$
3. $(x+2xy)^2 = (x)^2 + 2(x)(2xy) + (2xy)^2 = x^2 + 4x^2y + 4x^2y^2$
4. $(x^3+3y^5)^2 = (x^3)^2 + 2(x^3)(3y^5) + (3y^5)^2 = x^6 + 6x^3y^5 + 9y^{10}$

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CONJUGADOS

“El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos dos términos es el cuadrado del término que no cambia de signo menos el cuadrado del término que cambia de signo”.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

1. $(x-3)(x+3) = (x)^2 - (3)^2 = x^2 - 9$
2. $(1+2x)(1-2x) = (1)^2 - (2x)^2 = 1 - 4x^2$
3. $\left(\frac{x^2}{4} + 3x^3\right)\left(3x^3 - \frac{x^2}{4}\right) = (3x^3)^2 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = 9x^6 - \frac{x^4}{16}$
4. $(x^2-4)(-x^2-4) = (-4)^2 - (x^2)^2 = 16 - x^4$

CUBO DE UN BINOMIO

“El cubo de un binomio es el cubo del primer término, más o menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más e l triple del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo”.

$$1. \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$2. \quad (2x-3)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 - (3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

$$3. \quad (5x-2y^2)^3 = (5x)^3 - 3(5x)^2(2y^2) + 3(5x)(2y^2)^2 - (2y^2)^3 \\ = 125x^3 - 150x^2y^2 + 60xy^4 - 27y^6$$

$$4. \quad \left(\frac{x}{3} - 3xy\right)^3 = \left(\frac{x}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{3}\right)^2(3xy) + 3\left(\frac{x}{3}\right)(3xy)^2 - (3xy)^3 \\ = \frac{x^3}{27} - x^3y + 9x^2y^2 - 27x^3y^3$$

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS DEL TIPO $(ax + b)(cx + d)$

“El producto de los dos primeros términos, más la suma de los productos del primero por el segundo y del segundo por el primero (productos cruzados), más el producto de los dos últimos”.

$$(ax + b)(cd + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

$$1. \quad (x+3)(x+2) = x^2 + (3+2)x + (3)(2) = x^2 + 5x + 6$$

$$2. \quad (x+4)(x-8) = x^2 + (4-8)x + (4)(-8) = x^2 - 4x - 32$$

$$3. \quad (x-1)(x-4) = x^2 + (-1-4)x + (-1)(-4) = x^2 - 5x + 4$$

$$4. \quad (2x+3)(x-4) = (2)(1)x^2 + [(2)(-4) + (3)(1)]x + (3)(-4) = 2x^2 - 5x - 12$$

$$5. \quad (5x-2)(3x-1) = (5)(3)x^2 + [(5)(-1) + (-2)(3)]x + (-2)(-1) = 15x^2 - 11x + 2$$

PRODUCTO DE UN BINOMIO POR UN TRINOMIO DEL TIPO

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

Este tipo de producto resulta en el cubo del primer término más o menos el cubo del segundo.

1. $(x-3)(x^2+3x+9) = (x)^3 - (3)^3 = x^3 - 27$
2. $(2x+5)(4x^2-10x+25) = (2x)^3 + (5)^3 = 8x^3 + 125$
3. $(x^2-y)(x^4+x^2y+y^2) = (x^2)^3 - (y)^3 = x^6 - y^3$
4. $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{8} + \frac{y^2}{16}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \left(\frac{y}{4}\right)^3 = \frac{x^3}{8} - \frac{y^3}{64}$

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(a \pm b)^n$$

TRIÁNGULO DE PASCAL	POTENCIA DE UN BINOMIO
1	$(a \pm b)^0 = 1$
1 1	$(a \pm b)^1 = a \pm b$
1 2 1	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
1 3 3 1	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
1 4 6 4 1	$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$
1 5 10 10 5 1	$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \mp b^5$
1 6 15 20 15 6 1	$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$

1. $(2x-y)^4 = (2x)^4 - 4(2x)^3(y) + 6(2x)^2(y)^2 - 4(2x)(y)^3 + (y)^4$
 $= 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$
2. $(x^2+2y^3)^5 = (x^2)^5 + 5(x^2)^4(2y^3) + 10(x^2)^3(2y^3)^2 + 10(x^2)^2(2y^3)^3 + 5(x^2)(2y^3)^4 + (2y^3)^5$
 $= x^{10} + 10x^8y^3 + 40x^6y^6 + 80x^4y^9 + 32y^{15}$

FACTORIZACIÓN

Factorizar consiste en tratar de expresar una cantidad en forma de producto o de multiplicación.

Si la cantidad es numérica, por ejemplo:

$$18 = (2)(2)(3)$$

$$32 = (2)(2)(2)(2)(2)$$

$$60 = (2)(2)(3)(5)$$

Si necesitamos factorizar una expresión algebraica, generalmente un polinomio, se trata de analizar el posible producto que generó el polinomio.

Por ejemplo si analizamos el polinomio $2x + 2y$ y nos preguntamos, ¿Qué factores primos dieron como resultado esa expresión? Si notamos, ambos términos son divisibles entre 2, o bien 2 es el mínimo común múltiplo de ambos términos, entonces podemos escribir $2(x + y)$, que es la expresión factorizada de $2x + 2y$. **Acabamos de factorizar el polinomio por factor común.**

Ejemplos:

1. $ax + ay = a(x + y)$

2. $6x + 2y = 2(x + y)$

3. $2xy + 4xz = 2x(y + 2z)$

4. $2x + x^2 = x(2 + x)$

5. $6xy + 2x^2y^2 = 2xy(3 + xy)$

6. $ab^2 - a^2b = ab(b - a)$

FACTORIZACIÓN DE UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS

Una diferencia de cuadrados tiene la forma $a^2 - b^2$ y si recordamos, esta forma es producto de multiplicar dos binomios conjugados. Entonces en forma de factores, esto se expresa así:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

1. $4x^2 - y^2 = (2x + y)(2x - y)$

2. $9x^4 - 16y^2 = (3x^2 + 4y)(3x^2 - 4y)$

3. $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

4. $16x^2 - (3y + z)^2 = [4x + (3y + z)][4x - (3y + z)] = (4 + 3y + z)(4x - 3y - z)$

FACTORIZACIÓN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

Hay ocasiones en las que no todos los términos del polinomio tienen un mismo factor en común, pero algunos sí, de tal forma que, si se agrupan y se extrae el factor común en ellos, pueda quedar una expresión que vuelva a tener factor común y sea posible factorizarla.

Es común que haya más de una forma de proceder en este tipo de operaciones, así que la experiencia y la práctica son fundamentales, sobre todo para analizar cómo se debe iniciar el procedimiento.

Ejemplo. Factorizar las siguientes expresiones:

$$1. \quad ax - bx - ay + by = (ax - bx) + (-ay + by) = x(a - b) - y(a - b)$$

$$ax - bx - ay + by = (a - b)(x - y)$$

$$2. \quad x - y - x^2 + y^2 = (x - y) - (x^2 - y^2) = (x - y) - (x + y)(x - y) = (x - y)[1 - (x + y)]$$

$$x - y - x^2 + y^2 = (x - y)(1 - x - y)$$

$$3. \quad 9c^2 - 4a^2 + 4ab - b^2 = 9c^2 - (4a^2 - 4ab + b^2) = 9c^2 - (2a - b)^2$$

$$9c^2 - 4a^2 + 4ab - b^2 = [3c + (2a - b)][3c - (2a - b)] = (3c + 2a - b)(3c - 2a + b)$$

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS

La factorización de trinomios del tipo $ax^2 + bx + c$, sean cuadrados perfectos o no, se expresan como el producto de dos binomios que hay que deducir aplicando a la inversa la regla del producto notable $(ax + b)(cx + d)$. La deducción complica dependiendo del número de formas distintas posibles de descomponer los coeficientes a y c , pero con la práctica se puede mejorar mucho la eficiencia.

Ejemplos: factorización de trinomios de las formas $x^2 + bx + c = 0$ y $ax^2 + bx + c = 0$

$$1. \quad 9y^2 + 6y + 1 = (3y + 1)(3y + 1) = (3y + 1)^2$$

$$\begin{array}{l} 3y \quad +1 = 3y \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3y \quad +1 = \frac{3y}{6y} \end{array}$$

$$2. \quad x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$$

$$\begin{array}{l} x \quad +4 = 4x \\ \swarrow \searrow \\ x \quad +3 = \frac{3x}{7x} \end{array}$$

3. $3y^3 - 24y^2 + 21y = 3y(y^2 - 8y + 7) = 3y(y-7)(y-1)$

$$\begin{array}{l} y \quad -7 = -7y \\ \swarrow \searrow \\ y \quad -1 = \frac{-y}{-8y} \end{array}$$

4. $6y^2 - 11y + 5 = (6y-5)(y-1)$

$$\begin{array}{l} 6y \quad -5 = -5y \\ \swarrow \searrow \\ y \quad -1 = \frac{-6y}{-11y} \end{array}$$

5. $5x^2 - 10xy - 15y^2 = (5x+5y)(x-3y) = 5(x+y)(x-3y)$

$$\begin{array}{l} 5x \quad +5y = +5xy \\ \swarrow \searrow \\ x \quad -3y = \frac{-15xy}{-10xy} \end{array}$$

6. $12b^2 - 31bc + 9c^2 = (4b-9c)(3b-c)$

$$\begin{array}{l} 4b \quad -9c = -27bc \\ \swarrow \searrow \\ 3b \quad -c = \frac{-4bc}{-31bc} \end{array}$$

FACTORIZACIÓN DE SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS

Este tipo de expresión algebraica proviene del producto notable de un binomio por un trinomio del tipo, $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ por lo tanto, el proceso de factorización es a la inversa, como se muestra:

1. $8a^3 + b^3 = (2a+b)(4a^2 - 2ab + b^2)$

2. $y^3 - 8 = (y-2)(y^2 - 2y + 4)$

3. $a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) = (a+b)(a-b)(a^4 + 2a^2b^2 + b^4)$

$$4. \quad (x+y)^3 - z^3 = [(x+y) - z] [(x+y)^2 + z(x+y) + z^2] \\ = (x+y-z)(x^2 + 2xy + y^2 + xz + yz + z^2)$$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una fracción del tipo $\frac{a}{b}$ Representa el cociente del dividendo "a" o numerador, entre el divisor "b" o denominador. Ambos son los términos de la fracción.

PRINCIPIO FUNDAMENTALES DE LAS FRACCIONES

Si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican o dividen por una misma cantidad (que no sea cero), se obtiene una fracción equivalente. La fracción no se altera.

SIGNOS EN LAS FRACCIONES

- En una fracción hay que considerar tres signos: El signo de la fracción, el signo del numerador y el signo del denominador.
- A una fracción se le pueden cambiar dos signos y la fracción no se altera:

$$\frac{a}{b} = -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

Si en el numerador o en el denominador hay más de un factor, se puede cambiar en general un número par de signos y la fracción no se altera.

REDUCCIÓN O SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Simplificar una fracción es convertirla en una fracción equivalente cuyos términos sean primos entre sí. Entonces la fracción está reducida a la mínima expresión.

Ejemplos y ejercicios: Reducción de fracciones con denominadores que son monomios o que son polinomios.

$$1. \quad \frac{4x^3y^5}{6x^4y^4z} = \frac{(2)(2)y^{5-4}}{(2)(3)x^{4-3}z} = \frac{2y}{3xz}$$

$$2. \quad \frac{9a^3b^3}{36a^5b^6} =$$

$$3. \quad \frac{2t^2}{4t^2 - 4tr} = \frac{2t^2}{4t(t-r)} = \frac{t}{2(t-r)}$$

$$4. \quad \frac{4a^2b^3}{24a^3b^3 - 36a^3b^4} =$$

$$5. \quad \frac{a^2 - 5a + 6}{2a^2 - 6a} =$$

$$6. \quad \frac{8x^3 + 27}{4x^2 + 12x + 9} = \frac{(2x+3)(4x^2 - 6x + 9)}{(2x+3)(2x+3)} = \frac{4x^2 + 6x + 9}{2x+3}$$

$$7. \quad \frac{x^3 - 25x}{2x^3 + 8x^2 - 10x} =$$

$$8. \quad \frac{3x^3 - 12x - x^2y + 4y}{x^4 - 5x^3 - 14x^2} =$$

$$9. \quad \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 4x + 3)} =$$

$$10. \quad \frac{ax^2 - 9a}{3x + 3y + x^2 + xy} = \frac{a(x^2 - 9)}{3(x+y) + x(x+y)} = \frac{a(x+3)(x-3)}{(x+y)(3+x)} \\ = \frac{a(x-3)}{x+y}$$

$$11. \quad \frac{2x^2 + x - 3}{1 - x^3} = \frac{(2x+3)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\frac{2x+3}{1+x+x^2}$$

$$12. \quad \frac{a^2 - 4a + 4}{4a^2 - a^4} = \frac{(a-2)(a-2)}{a^2(4-a^2)} = \frac{(a-2)(a-2)}{a^2(2+x)(2-x)} = -\frac{a-2}{a^2(x+2)}$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

El producto de dos fracciones se obtiene multiplicando entre sí los numeradores y los denominadores. Posteriormente se reduce a la mínima expresión.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplos: multiplicación de fracciones con denominadores son monomios y polinomios.

$$1. \quad \frac{ab}{c} \cdot \frac{a^2b}{2c} = \frac{a^3b^2}{2c^2}$$

$$2. \quad \frac{3x^2y}{5z} \cdot \frac{10xz^3}{21y^3} = \frac{(3)(2)(5)x^3yz^3}{(5)(3)(7)y^3z} = \frac{2x^3z^2}{7y^2}$$

$$3. \quad \frac{(a-2b)(a+b)}{(a-b)(a+3b)} \cdot \frac{(a-b)(a+5b)}{(a-2b)} \cdot \frac{(a+3b)}{(a+b)(a-3b)} = \frac{a+5b}{a-3b}$$

$$4. \quad \frac{x^2-3x+2}{2x^2+3x-2} \cdot \frac{2x^2+5x-3}{x^2-1} \cdot \frac{3x^2+6x}{2x-4} = \frac{(x-2)(x-1)(2x-1)(x+3)3x(x+2)}{(2x+1)(x+2)(x+1)(x-1)2(x-2)} = \frac{3x(x+3)}{2(x+1)}$$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para dividir se puede aprovechar la experiencia de saber multiplicar y entonces calcular el cociente de dos fracciones invirtiendo los términos del divisor y luego multiplicando.

Ejemplo 1:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejercicios:

$$1. \quad \frac{x^2-3x+2}{2x^2-7x+3} \div \frac{x^2-x-2}{2x^2+3x-2} = \frac{x^2-3x+2}{2x^2-7x+3} \cdot \frac{2x^2+3x-2}{x^2-x-2}$$

$$= \frac{(x-2)(x-1)(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(x-3)(x-2)(x+1)} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+1)}$$

$$2. \quad \frac{26xy^3}{15x^2z} \cdot \frac{6y^2z}{65x^2y^3} \div \frac{8x^4y}{25x^4z^3} =$$

$$\frac{2x^2 + 3x}{y^2 - 2y} \cdot \frac{xy^2 - 2xy}{4x^2 - 9} \div \frac{x}{2xy - 3y} =$$

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Si dos o más fracciones tienen el mismo denominador, es decir, si son fracciones semejantes, entonces se suman o restan de la misma forma en la que se suman o restan los números enteros.

Si tienen distinto denominador, hay que encontrar un nuevo denominador común (mínimo común múltiplo de los denominadores) y convertir las fracciones al nuevo denominador para sumar o restar. Finalmente, si el resultado se puede reducir, hay que hacerlo.

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}; a = \text{número de veces que se tiene la fracción } b$$

$$\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}; \text{ La fracción es un tercio, la cantidad de tercios es dos. Se lee dos tercios.}$$

Para sumar fracciones con el mismo denominador solo hay que sumar los numeradores.

$$\frac{6}{5} - \frac{2}{5} + \frac{1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{(6 - 2 + 1 - 3)}{5} = \frac{2}{5}$$

Cuando las fracciones no son semejantes, se deben reducir primero a fracciones semejantes y posteriormente sumar los numeradores. La fracción semejante es el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

Ejemplos: Suma y resta de fracciones con denominadores numéricos comunes y distintos.

$$1. \quad \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} - \frac{9}{5} = \frac{3+1+4-9}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$2. \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\text{M.C.M} = (3)(4) = 12$$

Ahora pasaremos a resolver ejercicios que van transitando de las habituales fracciones numéricas a las algebraicas, primero con denominadores numéricos y posteriormente con denominadores algebraicos que sean monomios y, por último, con denominadores que sean polinomios. Ejemplos:

$$3. \quad \frac{3x}{4} - \frac{5-2x}{30} = \frac{3x}{(2)(2)} - \frac{5-2x}{(2)(3)(5)} = \frac{15(3x) - 2(5-2x)}{60} = \frac{45x - 10 + 4x}{60} = \frac{49x - 10}{60}$$

$$4. \quad \frac{5}{a} - \frac{3}{b} + \frac{2}{c} = \frac{5bc - 3ac + 2ab}{abc}$$

$$5. \quad \frac{2}{3a} + \frac{5}{2b} - \frac{3}{12ab^2} = \frac{4b^2(2) + 6ab(5) - 1(3)}{12ab^2} = \frac{8b^2 + 30ab - 3}{12ab^2}$$

Para ir transitando hacia fracciones que tienen denominadores que son polinomios, primero veamos ejemplos donde los hay, pero no es posible o necesario factorizarlos.

$$6. \quad \frac{a}{a-b} - \frac{a}{b} + \frac{a+b}{b^2} = \frac{ab^2 - ab(a-b) + (a+b)(a-b)}{b^2(a-b)}$$

$$= \frac{ab^2 - a^2b + ab^2}{b^2(a-b)} = \frac{b^2 + ab - a^2}{b^2(a-b)}$$

Ahora veremos los casos más complejos, fracciones con polinomios en el denominador, que deben factorizarse para encontrar el mínimo común múltiplo de los denominadores, para poder sumar.

$$7. \quad \frac{1}{3x-3} + \frac{1}{2x-2} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2(x+1) + 3(x+1) + 6}{6(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x-2+3x+3+6}{6(x+1)(x-1)} = \frac{5x+11}{6(x+1)(x-1)}$$

$$1. \quad \frac{a-1}{a^2-4} + \frac{a-2}{a^2-a-6} + \frac{a+6}{a^2-5a+6} =$$

$$2. \quad \frac{3x-y}{x^2-y^2} - \frac{x+3y}{x^2+3xy+2y^2} - \frac{1}{z+2y} =$$

FRACCIONES COMPLEJAS

Para reducir una fracción compleja a una fracción simple, se puede multiplicar el numerador y el denominador por el MCM de todos los denominadores. Ejemplo:

$$1. \quad \frac{1 + \frac{x}{y}}{x+y} = \frac{1 + \frac{x}{y}}{x+y} \cdot \frac{y}{y} = \frac{y+x}{y(x+y)} = \frac{1}{y}$$

Ejercicios:

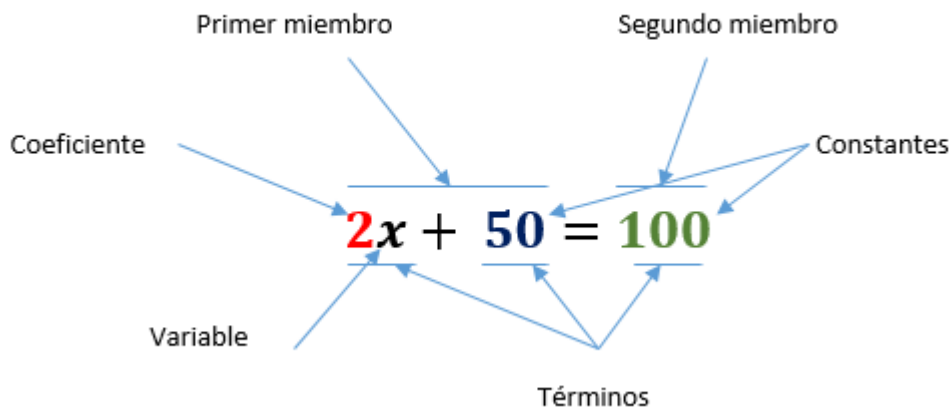
$$1. \frac{\frac{2}{x+y} - \frac{1}{x-y}}{\frac{4(x-y)}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}} =$$

$$2. \frac{\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}}{1 - \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2}} =$$

$$3. \frac{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{x+1}}} =$$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Tiene algunos números de valor conocido y otros de valor desconocido, que se relacionan entre sí por medio de operaciones matemáticas. Sus componentes se explican en la siguiente figura:



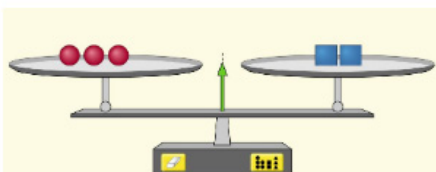
Las ecuaciones son una de las herramientas más poderosas del álgebra y han sido fundamentales para el desarrollo de las ciencias y de la ingeniería. Las ecuaciones son el lenguaje con el que se puede modelar, diseñar y experimentar antes de producir, con mayor certeza, si los cálculos son acertados.

Una analogía que puede ayudar a comprender cómo funcionan las ecuaciones es la de una balanza perfectamente equilibrada en la que las cantidades variables se ajustan al valor necesario para mantener el equilibrio. Esto se puede lograr si se respeta el siguiente principio básico.

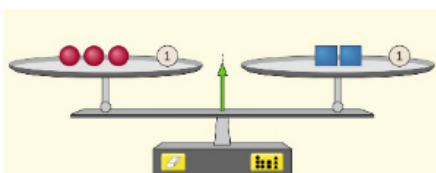
PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES

En toda ecuación es posible sumar, restar, multiplicar o dividir ambos miembros de la ecuación por una misma cantidad, que no sea cero, y la ecuación sigue conservando la igualdad entre sus lados. También es posible elevar ambos miembros a una misma potencia o extraer la misma raíz y la igualdad se conserva.

Para ilustrar este principio vamos a empezar por explicar cómo se puede sumar la misma cantidad en ambos lados de una ecuación y el balance o equilibrio entre ambos lados se mantiene.



Tres bolas rojas pesan lo mismo que dos cubos azules. ¿Qué pasa si en ambos lados sumamos una misma cantidad? Sumemos una unidad en ambos lados.



Como puede verse, el lado izquierdo sigue pesando lo mismo que el lado derecho, con lo que comprobamos que la igualdad no se pierde.

Imagen tomada de <https://phet.colorado.edu/es/simulations/equality-explorer-basics>

Ejemplos: Ecuaciones de primer grado enteras y fraccionarias.

$$\begin{aligned} x + 3 &= 8 \\ 1) \quad x + 3 \boxed{-3} &= 8 \boxed{-3} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 4 &= 1 \\ 2) \quad x - 4 \boxed{+4} &= 1 \boxed{+4} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x &= 8 \\ 3) \quad 5x \cdot \boxed{\frac{1}{5}} &= 8 \cdot \boxed{\frac{1}{5}} \\ x &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$\frac{x}{4} = 3$$

$$4) \quad \frac{x}{4} \cdot 4 = 3 \cdot 4$$

$$x = 12$$

$$3x + 5 = 7$$

$$3x + 5 - 5 = 7 - 5$$

$$5) \quad 3x \cdot \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$6) \quad \frac{2}{3}x + 5 = 8$$

$$7) \quad 5(x + 3) = 8$$

$$8) \quad 5 - 3(x + 2) = 2(1 - x)$$

$$9) \quad \frac{3}{5} - \frac{1-x}{x} = \frac{7}{3}$$

$$10) \quad \frac{x}{x+1} + \frac{5}{8} = \frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{4}$$

$$11) \quad \frac{3}{x-4} - \frac{2}{x-3} = \frac{6}{x^2 - 7x + 12}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN QUE SE PUEDEN MODELAR CON ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Ejemplo 1. Una caravana de autos recorrió 380 km en siete horas de recorrido. Durante cuatro horas circularon sobre pavimento y el resto sobre terracería. Si la velocidad promedio en terracería es 25 km/hr menor que la velocidad media en pavimento, encuentre la velocidad media y la distancia recorrida en cada uno de los tramos de camino.

$x = \text{velocidad en carretera}$

$x - 25 = \text{velocidad en terracería}$

$4x = \text{distancia recorrida en pavimento}$

$3(x - 25) = \text{distancia recorrida en terracería}$

$$4x + 3(x - 25) = 380$$

$$4x + 3x - 75 = 380$$

$$7x - 75 + 75 = 380 + 75$$

$$7x \cdot \frac{1}{7} = 455 \cdot \frac{1}{7}$$

$$x = 65 \frac{\text{km}}{\text{hr}}; 4x = 260 \text{ Km} (\text{velocidad y distancia en pavimento})$$

$$x - 25 = 40 \frac{\text{km}}{\text{hr}}; 3(x - 25) = 120 \text{ km} (\text{velocidad y distancia en terracería})$$

Ejemplo 2. Un carpintero quiere hacer un ensamble de tres piezas de madera. La pieza más larga debe medir el doble que la mediana y la más corta debe ser 10 pulgadas más corta que la pieza mediana. Si las tres piezas se van a cortar de una tabla de 70 pulgadas de largo, ¿Qué longitud debe tener cada pieza?

$x = \text{longitud de la pieza mediana}$

$2x = \text{longitud de la pieza más larga}$

$x - 10 = \text{longitud de la pieza más corta}$

$$x + (x - 10) + 2x = 70$$

$$x + x - 10 + 2x = 70$$

$$4x - 10 = 70$$

$$4x - 10 + 10 = 70 + 10$$

$$4x \cdot \frac{1}{4} = 80 \cdot \frac{1}{4}$$

$$x = 20 \text{ pulg. la mediana}, 2x = 60 \text{ pulg la grande y } x - 10 = 10 \text{ pulg la pequeña}$$

Ejemplo 3. Un químico debe mezclar 8 litros de una solución ácida al 40% con una solución al 70%, para obtener una solución al 50%. ¿Qué cantidad de solución al 70% debe usar?

Problemas adaptados de brainly.lat/tarea/37518127

Ejemplo 4: Resolver la ecuación para las variables indicadas (despejar).

$$d = v_i t + \frac{at^2}{2}; a$$

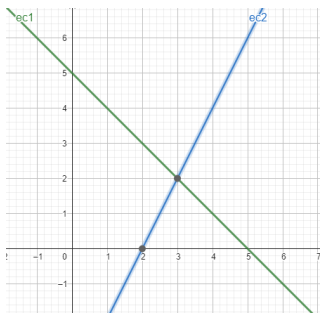
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; R_1$$

$$T = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2; v_1$$

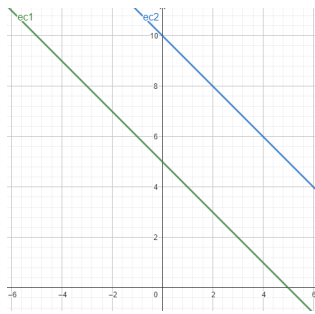
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

La gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas corresponde a una línea recta en un plano cartesiano de dos dimensiones (x, y). Un par de ellas representa un sistema que tiene como solución el punto en el que se intersectan las gráficas de ambas. En un sistema puede darse la situación de que ambas rectas sean paralelas, lo cual implica que no tiene solución y también que las rectas se sobrepongan, lo que significa que tienen infinita cantidad de soluciones.



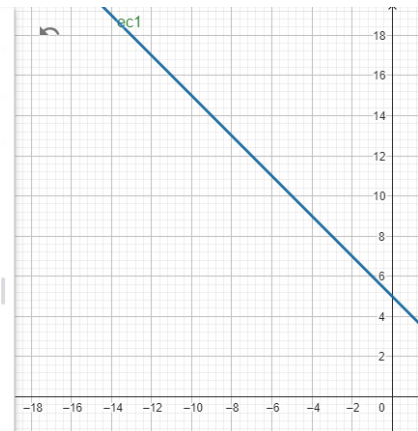
La solución es un punto



No tiene solución

ec1 : $x + y = 5$ ⋮
 ec2 : $2x + 2y = 10$ ⋮
 Entrada...

Infinitas soluciones



MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR SUMA Y RESTA

Consiste en reducir una de las variables en ambas ecuaciones al sumarlas. Para ilustrar el método es más sencillo comentarlo en un ejemplo:

1. $x + 2y = 8$
 $2x + y = 7$

Seleccionaremos una variable a reducir, puede ser "y". Entonces necesitamos que al sumar ambas ecuaciones, "y" se reduzca a cero. Multiplicaremos la segunda ecuación por 2 y a la primera por -1 para que se logre lo propuesto. (Recuerde que se puede multiplicar cualquier ecuación por la cantidad deseada y se obtiene otra equivalente).

$$\begin{array}{r} -1 \int x + 2y = 8 \\ 2 \int 2x + y = 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x - 2y = -8 \\ 4x + 2y = 14 \\ \hline \end{array}$$

En esta parte, al sumar ambas ecuaciones se reducirá "y"

$3x = 6$; $x = \frac{6}{3}$; $x = 2$ Quedó una ecuación con una sola incógnita que puede calcularse.

Sustituyendo en una de las ecuaciones originales: $2(2) + y = 7$; $y = 7 - 4$; $y = 3$. Resolver por suma y resta:

$$1. \quad \begin{array}{r} 2x - 3y = -4 \\ 3x + y = 5 \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{r} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{2} \\ x - 6y = -2 \end{array}$$

MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR SUSTITUCIÓN

En este método primero se despeja una variable en una ecuación, luego se sustituye en la otra para obtener una ecuación con una sola variable; se resuelve para encontrar la primera variable y finalmente se sustituye la variable encontrada en una de las ecuaciones originales o en el primer despeje, para obtener la variable que falta.

Resolver por sustitución:

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 13 \\ 4x - y = -1 \end{array}$$

Despejamos "y" en la segunda ecuación: $4x + 1 = y$

Sustituimos "y" en la primera ecuación: $3x + 2(4x + 1) = 13$; $3x + 8x + 2 = 13$

$$11x = 13 - 2 ; x = \frac{11}{11} ; x = 1$$

Regresamos para sustituir "x" en el despeje inicial: $y = 4(1) + 1 ; y = 5$

Ejercicios:

$$1. \quad \begin{aligned} 3x + 3y &= -3 \\ 4x + y &= 5 \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} 5x + 7y &= -1 \\ -3x + 4y &= -24 \end{aligned}$$

MÉTODO DE CRAMER POR DETERMINANTES

Un determinante es una representación del sistema de ecuaciones donde los coeficientes de las variables se representan en forma ordenada. En el caso de un sistema de dos ecuaciones con dos

$$a_1x + b_1y = c_1$$

incógnitas de la forma: $a_2x + a_2y = c_1$ se puede construir un arreglo numérico con los coeficientes de las variables, al que llamaremos "determinante general", cuya representación y regla de cálculo es:

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

Luego se construye y calcula un determinante para cada variable sustituyendo en la columna de la variable en cuestión, los términos independientes de las ecuaciones. El proceso es el que se muestra:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2$$

Finalmente, se calcula el valor de cada variable dividiendo el determinante de la variable entre el determinante general.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_G}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_G}$$

Ejemplo 1: $5x - 2y = 4$
 $2x + 3y = 13$

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (5)(3) - (-2)(2) = 15 + 4 ; \Delta_G = 19$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (-2)(13) = 12 + 26 ; \Delta_x = 38 ; x = \frac{38}{19} ; x = 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = (5)(13) - (4)(2) = 65 - 8 ; \Delta_y = 57 ; y = \frac{57}{19} ; y = 3$$

Resolver por el método de determinantes. Ejercicios:

1. $5x + 7y = -1$
 $-3x + 4y = -24$

2. $4x + 5y = 5$
 $-10x - 4y = -7$

3. $2x + 5y = -24$
 $8x - 3y = 19$

APLICACIONES DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Ejemplo 1. Un campo rectangular de futbol puede tener un ancho entre 50 y 100 yardas, y una longitud entre 50 y 100 yardas. Suponga que un campo determinado tiene un perímetro de 320 yardas. Su largo mide 40 yardas más que su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del campo?

$L =$ largo del campo y $A =$ ancho del campo

$$2L + 2A = 320$$

$$L = 40 + A$$

Sustituyendo L y resolviendo la ecuación para la variable A, tenemos:

$$2(40 + A) + 2A = 320 ; 80 + 2A + 2A = 320 ; 4A = 240 ; A = 60 \text{ yardas}$$

$$L = 40 + 60 ; L = 100 \text{ yardas}$$

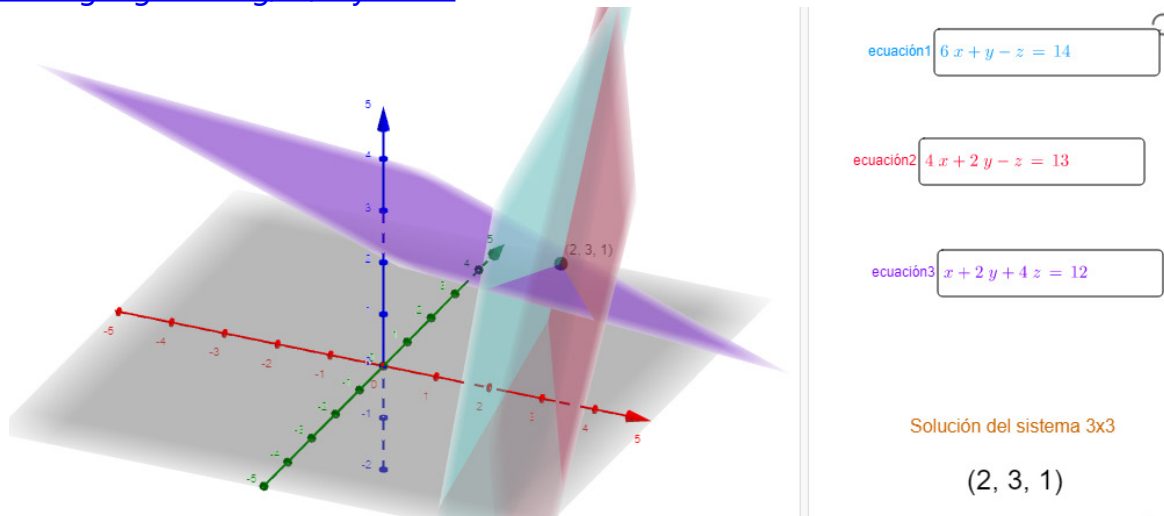
Ejercicio 1. Durante temporadas recientes de una liga de béisbol y de basquetbol, dos boletos de béisbol y uno de basquetbol costaban en promedio \$148.79 y un boleto de béisbol y dos de basquetbol costaban \$148.60. ¿Cuánto costaban en promedio los boletos de cada uno de los deportes?

Ejercicio 2. Dos autos que se encuentran a 400 km el uno del otro, salen al mismo tiempo en una trayectoria recta para encontrarse en un punto entre ambos. Ellos se encuentran después de 4 horas. Calcule la velocidad de cada auto si uno viaja 20 km/hr más rápido que el otro.

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

En un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, cada una representa un plano en un sistema tridimensional. La solución del sistema es el punto en el que se cruzan los tres planos.

<https://www.geogebra.org/m/czyx5ekw>



Práctica para comprender el significado de la interpretación geométrica.

1. Entra al enlace <https://www.geogebra.org/m/czyx5ekw> y borra las ecuaciones 1, 2 y 3 que encuentres cargadas. Trata de identificar los ejes "x", "y" y "z". **¿De qué color es cada uno de ellos?** Rota la figura y trata de ponerla en posición para ver cada eje como un punto; en ese momento está viendo de frente los planos que forman las otras dos variables.
2. En ecuación 1 introduce la ecuación: $x = 3$ y observa el plano que se forma. Rota el modelo hasta lograr que el eje "z" se vea como un punto. **¿Cómo se ve el plano desde esa perspectiva?**
3. En la ecuación 2 introduce $y = 2$ y en la ecuación 3 introduce $z = 4$. **¿En qué punto se cruzan los tres planos?**
4. Borra las tres ecuaciones y escribe las siguientes: $x + y = 0$, $x + y = -4$ y $x + y = 4$. ¿Por qué no tiene solución el sistema? Si en las ecuaciones 2 y 3 escribes las ecuaciones $x + y = 8$ y $x + y = -8$ ¿Qué pasa con los planos?, ¿se acercan o se alejan?, ¿Qué puedes concluir con relación al término independiente de las ecuaciones y su significado?
5. Borra todo e introduce la ecuación $x + y + z = 6$, observa y trata de ver el plano que representa, luego introduce $x - y + z = 4$. ¿Notas que al cruzarse ambos planos forman una recta? Por último introduce $x + y - z = 6$. ¿En qué punto se cruzan los tres planos?

MÉTODO DE REDUCCIÓN POR SUMA Y RESTA

1. Reducir una variable en un par de ecuaciones. El resultado serán dos ecuaciones con dos incógnitas.
2. Resolver el sistema que quedó del paso anterior por cualquiera de los métodos ya conocidos.
3. Encontrar la tercera variable sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones originales.

Ejemplo 1:

$$3x - 2y + 3z = 16$$

$$x + 3y - 6z = -23$$

$$5x + 4y - 3z = -9$$

Reducir "x" en 1 y 2

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 3z = 16 \\ x + 3y - 6z = -23 \end{array} \right. \\ \hline -3 \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 3z = 16 \\ x + 3y - 6z = -23 \end{array} \right. \\ \hline 3x - 2y + 3z = 16 \\ -3x - 9y + 18z = 69 \\ \hline -11y + 21z = 85 \end{array}$$

Reducir "x" en 1 y 3

$$\begin{array}{r} 5 \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 3z = 16 \\ -3 \left\{ \begin{array}{l} 5x + 4y - 2z = -9 \\ \hline 15x - 10y + 15z = 80 \\ -15x - 12y + 6z = 27 \\ \hline -22y + 21z = 107 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

Reducir "z" en 4 y 5

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} -11y + 21z = 85 \\ -1 \left\{ \begin{array}{l} -22y + 21z = 107 \\ \hline -11y + 21z = 85 \\ 22y - 21z = -107 \\ \hline 11y = -22 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

$$y = -\frac{22}{11}; y = -2$$

Sustituir en 4

$$-11(-2) + 21z = 85; 21z = 85 - 22; z = \frac{63}{21}; z = 3$$

Sustituir en 2

$$x + 3(-2) - 6(3) = -23; x = -23 + 18 + 6; x = 1$$

Los tres planos se intersectan en el punto (1, -2, 3). Resolver por suma y resta.

$$1. \quad \begin{array}{l} 2x - y + 2z = -8 \\ x + 2y - 3z = 9 \\ 3x - y - 4z = 3 \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{l} x = y - 2z \\ 2y = x + 3z + 1 \\ z = 2y - 2x - 3 \end{array}$$

MÉTODO DE REDUCCIÓN POR SUSTITUCIÓN

1. Se despeja una variable en una ecuación.
2. Se sustituye en las otras dos.
3. Se resuelve el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas recién obtenido.

Este método es más práctico en sistemas con ecuaciones que tienen menos variables. Se necesitan menos pasos en estos casos.

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}3x + 4y - 5z &= 37 \\2x - 3y + 2z &= -8 \\x - 2z &= 11\end{aligned}$$

Despejar x en 3

$$x = 11 + 2z$$

Sustituir en 1 y 2

$$\begin{aligned}3(11 + 2z) + 4y - 5z &= 37 ; 33 + 6z + 4y - 5z = 37 ; 4y + z = 4 \\2(11 + 2z) - 3y + 2z &= -8 ; 22 + 4z - 3y + 2z = -8 ; -3y + 6z = -30 ; -y + 2z = -10\end{aligned}$$

Resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Despejando z en 4: $z = 4 - 4y$

Sustituyendo en 5: $-y + 2(4 - 4y) = -10 ; -y + 8 - 8y = -10 ; -9y = -18 ; y = 2$

$$z = 4 - 4(2); z = 4 - 8 ; z = -4$$

$$x = 11 + 2(-4); x = 11 - 8 ; x = 3$$

Los planos se intersectan en el punto (3, 2, -4). Resolver por sustitución.

$$\begin{aligned}4x + 2y + 3z &= 8 \\1. \quad 3x + 4y + 2z &= -1 \\2x - y + 5z &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x - 2y &= 0 \\2. \quad 3y - 4z &= 25 \\z - 5x &= -14\end{aligned}$$

MÉTODO DE CRAMER (DETERMINANTES) PARA TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS

1. Se construye un determinante cuadrado de 3x3 y para calcularlo se puede ampliar las dos primeras columnas a la derecha o bien los dos primeros renglones hacia abajo.
2. Los productos y los signos se trabajan de forma similar a los de 2x2 que ya hemos trabajado.
3. Para estimar las variables de igual forma se dividen los determinantes de cada variable entre el general.

$$2x - y = 11$$

Ejemplo 1. $3x + 5z = 17$

$$2x + 5y + 4z = -3$$

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (2)(0)(4) + (-1)(5)(2) + (0)(3)(5) \\ -(-1)(3)(4) - (2)(5)(5) - (0)(0)(2) \end{matrix} = -10 + 12 - 50$$

$$\Delta_G = -48$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & -1 & 0 & 11 & -1 \\ 17 & 0 & 5 & 17 & 5 \\ -3 & 5 & 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (11)(0)(4) + (-1)(5)(-3) + (0)(17)(5) \\ -(-1)(17)(4) - (11)(5)(5) - (0)(0)(-3) \end{matrix} = 15 + 68 - 275$$

$$\Delta_x = -192; x = \frac{-192}{-48}; x = 4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 0 & 2 & 11 \\ 3 & 17 & 5 & 3 & 17 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (2)(17)(4) + (11)(5)(2) + (0)(3)(-3) \\ - (11)(3)(4) - (2)(5)(-3) - (0)(17)(2) \end{matrix} = 136 + 110 - 132 + 30$$

$$\Delta_y = 144; y = \frac{144}{-48}; y = -3$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 11 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 17 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (2)(0)(-3) + (-1)(17)(2) + (11)(3)(5) \\ -(-1)(3)(-3) - (2)(17)(5) - (11)(0)(2) \end{matrix} = -34 + 165 - 9 - 170$$

$$\Delta_z = -48; z = \frac{-48}{-48}; z = 1$$

Los planos se intersectan en el punto (4, -3, 1). Resolver por determinantes.

$$\begin{aligned} &4x + 2y + 3z = 8 \\ 1. \quad &3x + 4y + 2z = -1 \\ &2x - y + 5z = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - z = 7 \\ 2. \quad &\frac{x}{4} - \frac{3y}{2} + \frac{z}{2} = -6 \\ &\frac{x}{6} - \frac{y}{4} - \frac{z}{3} = 1 \end{aligned}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE SISTEMAS DE TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS:

Una parábola vertical corta el eje "x" en los puntos (-2, 0) y (3, 0) y pasa por (5, 10). Encuentre la ecuación de la parábola.

Ejemplo 1. La ecuación general de la parábola horizontal es $x^2 + bx + cy + e = 0$

Sustituyendo los tres puntos conocidos en la ecuación:

$$(-2)^2 + b(-2) + c(0) + e = 0; -2b + e = -4$$

$$(3)^2 + b(3) + c(0) + e = 0; 3b + e = -9$$

$$(5)^2 + b(5) + c(10) + e = 0; 5b + 10c + e = -25$$

Resolver el sistema:

Despejando "e" de la primera ecuación: $e = 2b - 4$

Sustituyendo en la segunda: $3b + 2b - 4 = -9$; $5b = -5$, $b = -1$

$$e = 2(-1) - 4; e = -6$$

Sustituyendo en 3: $5(-1) + 10c - 6 = -25$; $10c = -25 + 11$; $c = -\frac{14}{10}$; $c = -\frac{7}{5}$

Entonces la ecuación de la parábola es:

$$x^2 - x - \frac{7}{5}y - 6 = 0; 5x^2 - 5x - 7y - 30 = 0$$

Ejercicio 1. En un triángulo, el segundo ángulo es 50° menor que 4 veces el primero. El tercero es 40° menor que el primero. ¿Cuál es la medida de los tres ángulos?

Ejercicio 2. Juan compró 2 manzanas, 3 peras y 1 plátano y pagó por la fruta \$74.00. Sofía compró una fruta de cada tipo y pagó \$35.00 y finalmente Roberto pagó \$55.00 por 1 manzana, dos peras y un par de plátanos. ¿Cuánto cuesta una pieza de cada fruta?

ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA

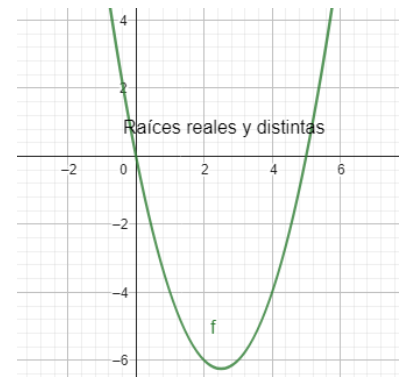
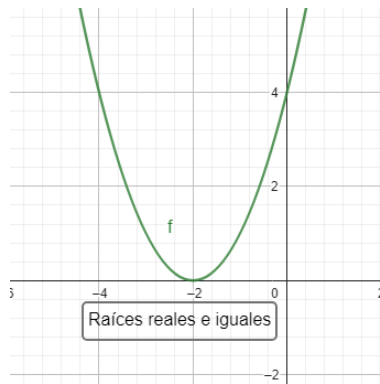
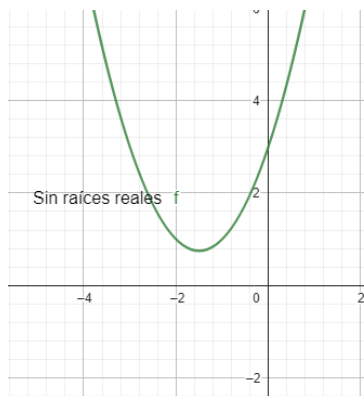
Su forma general es $ax^2 + bx + c = 0$

Expresándola como función de dos variables del tipo $y = ax^2 + bx + c$ gráficamente representa una parábola vertical y tiene dos soluciones o raíces que son los puntos en los que la parábola corta el eje "X", es decir encontrar los puntos X_1 y X_2 en donde la curva corta el eje "X" (cuando $y=0$).

De la ecuación en su forma general se puede calcular un parámetro llamado "discriminante" cuya equivalencia es $d = b^2 - 4ac$, que se relaciona con el tipo de solución que puede tener la ecuación y que puede tener tres casos:

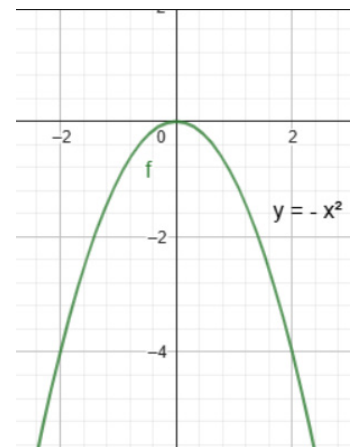
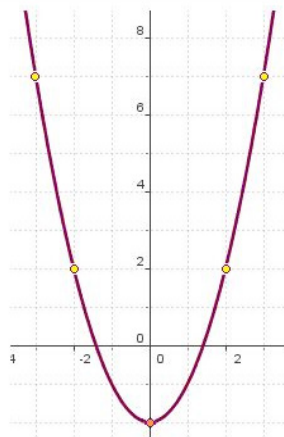
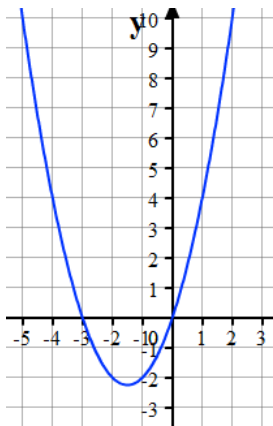
1. La curva no corta el eje "X", no tiene raíces reales, entonces sus soluciones son del tipo $a \pm bi$, también llamadas "**complejas conjugadas**". El determinante $d \leq 0$, *es decir negativo*.
2. La curva corta el eje "X" en un solo punto, entonces tiene una sola raíz o podemos considerar que son dos soluciones "**reales e iguales**". Originalmente son trinomios cuadrados perfectos y en este caso $d = 0$.

3. La curva corta el eje "X", en dos puntos; tiene dos raíces **"reales y distintas"**. En este último caso el determinante $d \geq 0$, *es decir, positivo*.



Algunas consideraciones y casos particulares comunes son:

- Si "a" es negativo, la gráfica es una parábola que abre hacia abajo (como en la gráfica de la derecha)
- Si la ecuación es **incompleta** del tipo $ax^2 + bx = 0$, la curva pasa por el origen y **una de sus soluciones es X=0**.
- Si la ecuación es **incompleta** del tipo $ax^2 + c = 0$, la curva es simétrica al eje "X" y tiene **dos soluciones con mismo valor y signos opuestos**.



Para resolver estas ecuaciones existen varios métodos de solución, algunos más convenientes que otros de acuerdo a las formas de la ecuación o del grado de dominio de los temas de álgebra básica de quien intenta resolverlas. Entre los métodos más utilizados están:

MÉTODO DE FACTORIZACIÓN

Este método sólo funciona para ecuaciones que sean factorizables y el procedimiento es el siguiente:

1. **Igualar la ecuación a cero**, si es que no lo está.

2. **Factorizar la ecuación** cuadrática obteniendo dos factores de primer grado.

3. **Igualar cada factor con cero y resolver las ecuaciones de primer grado**, obteniendo las raíces X_1 y X_2

Ejemplos: Ecuaciones cuadráticas completas e incompletas.

1. $x^2 - 8x - 9 = 0$

$$(x - 9)(x + 1) = 0$$

$$x - 9 = 0; x_2 = 9$$

$$x + 1 = 0; x_1 = -1$$

2. $x^2 - 3x = -2; x^2 - 3x + 2 = 0$

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

$$x - 2 = 0; x = 2$$

$$x - 1 = 0; x = 1$$

3. $x^2 - 8x + 9 = 0$

$(x - \quad)(x - \quad) = 0$; no es factorizable...este método no funciona para esta ecuación.

4. $6x^2 - 17x + 12 = 0$

$$(3x - 4)(2x - 3) = 0$$

$$3x - 4 = 0; x = \frac{4}{3}$$

$$2x - 3 = 0; x = \frac{3}{2}$$

5. $5x^2 - 10x = 0$ *Ecuación cuadrática mixta ... por factor común*

$$5x(x - 2) = 0$$

$$5x = 0; x = 0$$

$$x - 2 = 0; x = 2$$

6. $4x^2 - 25 = 0$ Ecuación cuadrática **pura** ... diferencia de cuadrados

Otro método posible en este tipo de ecuación es despejar:

$$(2x + 5)(2x - 5) = 0$$

$$4x^2 = 25$$

$$2x + 5 = 0; x = -\frac{5}{2}$$

$$x^2 = \frac{25}{4}$$

$$2x - 5 = 0; x = \frac{5}{2}$$

$$x = \pm \frac{5}{2}$$

7. $x^2 = 5$

$$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$$

$$x + \sqrt{5} = 0; x = -\sqrt{5} \quad x^2 = 5$$

$$x - \sqrt{5} = 0; x = \sqrt{5} \quad x = \pm\sqrt{5}$$

COMPLETANDO EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Este método es general, es decir, para cualquier tipo de ecuación cuadrática, factorizable o no, completa o incompleta. Puede ser complicado y requiere un proceso más largo pero su ventaja es que es general.

1. Transponer el término independiente al lado derecho de la ecuación para que quede con la forma $ax^2 + bx = -c$

2. Si $a \neq 1$, dividir la ecuación anterior por "a", resultando $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

3. **Completar el TCP sumando en ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente del**

segundo término; es decir $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$, resultando $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

4. Factorizar el TCP del lado izquierdo y sumar las fracciones del lado derecho. Esto resulta en:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

5. Extraer raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación, recordar que se generan dos posibles soluciones, despejando X y simplificando el radical resulta:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos: Solución de ecuaciones cuadráticas completando el trinomio cuadrado perfecto

Ejemplo 1.

$$x^2 - 8x + 9 = 0$$

$$x^2 - 8x = -9$$

$$x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = -9 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = -9 + 16$$

$$(x - 4)^2 = 7; x - 4 = \pm\sqrt{7}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{7}; x_1 = 4 - \sqrt{7}, x_2 = 4 + \sqrt{7}$$

FÓRMULA GENERAL

Consiste en aplicar directamente la fórmula general que obtuvimos al resolver la ecuación por el método anterior teniendo cuidado de lo siguiente:

1. Igualar la ecuación a cero y ordenarla de exponente mayor a menor si es que no lo está.
2. Definir los valores de a, b y c y sustituir en la fórmula para efectuar las operaciones cuidando el orden en que se realizan las mismas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1: Resolver una ecuación cuadrática ordenada y completa por fórmula general

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -6 \quad c = 7$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$x_2 = 3 + \sqrt{2}; x_1 = 3 - \sqrt{2}$$

Ejemplo 2 y 3: Resolver una ecuación cuadrática no ordenada por fórmula general con soluciones irracionales

$$5x^2 + 6x = 10; a = 5, b = 6, c = -10$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(5)(-10)}}{2(5)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 200}}{10} = \frac{-6 \pm \sqrt{236}}{10}$$

$$(2)(2)(59); 2^2 \cdot 59 \quad x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{59}}{10} = \frac{2(-3 \pm \sqrt{59})}{2(5)} = \frac{-3 \pm \sqrt{59}}{5}$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{59}}{5} \approx -2.13; x_2 = \frac{-3 + \sqrt{59}}{5} \approx 0.93$$

$$x^2 + 8x + 9 = 0$$

$$a = 1, b = 8, c = 9$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(9)}}{2(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 36}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -4 \pm \sqrt{7}$$

$$x_1 = -4 - \sqrt{7}, \quad x_2 = -4 + \sqrt{7}$$

Ejemplo 4: Ecuación cuadrática completa con soluciones complejas por fórmula general

$$5x^2 + 6x + 10 = 0$$

$$a = 5, b = 6, c = 10$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(5)(10)}}{2(5)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 200}}{10} = \frac{-6 \pm \sqrt{-164}}{10} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{-41}}{10} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}i}{5}$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{41}i}{5}, x_2 = \frac{-3 + \sqrt{41}i}{5}$$

Ejercicios: Ecuaciones cuadráticas completas e incompletas por cualquiera de los métodos.**Por factorización.**

$$1. \quad x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$2. \quad 5r^2 + 12r + 4 = 0$$

3. $x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$

4. $x^2 + 18x$

5. $3x^2 - 27$

Completando el TCP

6. $x^2 + 2x - 8 = 0$

7. $x^2 - 15x + 26 = 0$

8. $2m^2 + 10m - 48 = 0$

9. $x^2 - 7x - 18 = 0$

10. $3x^2 - 7x + 8 = 0$

Por fórmula general

11. $2x^2 = x + 6$

12. $5b^2 - 6b = 0$

13. $y + 3 = 2y^2$

14. $4a^2 - 4a - 11 = 0$

15. $x^2 - 4x + 8 = 0$

APLICACIONES DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Ejercicios.

1. Un rectángulo que tiene una base que es el doble de la altura, se divide en dos partes mediante una línea dibujada a 30 cm de la base y paralela a ella. Si la parte posterior del rectángulo tiene un área de $3,500 \text{ cm}^2$, encontrar las dimensiones del rectángulo.

2. Un círculo con centro en el punto $(-3, -2)$, pasa por los puntos $(0, 6)$ y $(a, 0)$. Hallar "a".

3. 25 multiplicado por un número es igual a su recíproco. ¿Cuál es el número?

4. Dos llaves de agua abiertas simultáneamente pueden llenar un tanque de agua en $2\frac{11}{12}$ horas. La llave que llena más despacio tarda tres menos que el doble del tiempo que tarda la llave más rápida. Si "t" es el tiempo en horas que tarda la llave más rápida, ¿cuál es el tiempo que tarda cada llave en llenar el tanque?

SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

En general, una ecuación de segundo grado con dos incógnitas puede tener la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde al menos un coeficiente entre A, B y C no debe ser cero.

Estas ecuaciones pueden representar una de las curvas cónicas entre la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola. Estas curvas serán estudiadas más a profundidad en la parte de Geometría Analítica de este curso.

Los métodos de solución de este tipo de sistemas son básicamente los que ya hemos utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Algunos criterios para seleccionar el método más conveniente se basan en la forma del sistema, así que para ilustrarlos dividiremos los sistemas en casos.

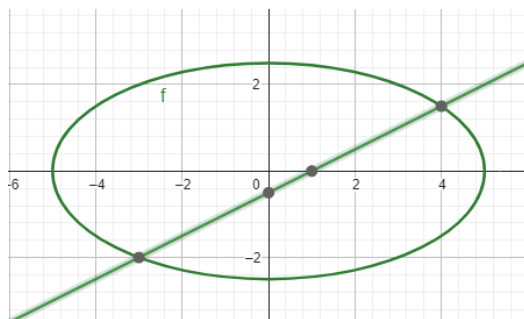
Las soluciones son los puntos en los que las gráficas de las funciones se intersectan.

SISTEMA FORMADO POR UNA ECUACIÓN LINEAL Y UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

En este caso se sugiere despejar una variable de la ecuación lineal y sustituir en la ecuación cuadrática. Resolver la cuadrática y posteriormente regresar al despeje para encontrar la otra variable. Las soluciones se presentan en forma de pares ordenados o puntos en el plano cartesiano.

Ejemplo 1.

$$\begin{aligned}x^2 + 4y^2 &= 25 \\x - 2y &= -1\end{aligned}$$



Se despeja "x" en la ecuación 2:

$$x = 2y - 1$$

Se sustituye en la 1:

$$(2y - 1)^2 + 4y^2 = 25$$

$$4y^2 - 4y + 1 + 4y^2 - 25 = 0 ; 8y^2 - 4y - 24 = 0$$

$$2y^2 - y - 6 = 0 ; (2y + 3)(y - 2) = 0 ; y_1 = -\frac{3}{2}, y_2 = 2$$

Regresando a encontrar "x":

$$x_1 = 2\left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = -3 - 1; \quad x_1 = -4$$

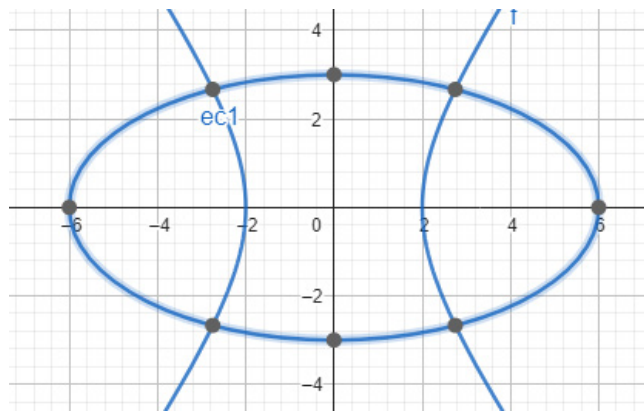
$$x_2 = 2(2) - 1 = 4 - 1; \quad x_2 = 3$$

Los puntos en los que se intersectan las curvas son:

$$P_1\left(-4, -\frac{3}{2}\right), P_2(3, 2)$$

SISTEMA FORMADO POR DOS ECUACIONES DEL TIPO $ax^2 \pm by^2 = c$

Ejemplo 2. $2x^2 - y^2 = 8$
 $x^2 + 4y^2 = 36$



Se puede utilizar el método de reducción por suma y resta

$$4 \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 8 \\ \underline{x^2 + 4y^2 = 36} \end{cases}$$

$$8x^2 - 4y^2 = 32$$

$$x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\underline{9x^2 = 68}$$

$$x^2 = \frac{68}{9}; \quad x = \pm \frac{2\sqrt{17}}{3}; \quad x_1 = \frac{2\sqrt{17}}{3}, \quad x_2 = -\frac{2\sqrt{17}}{3}$$

Sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones originales:

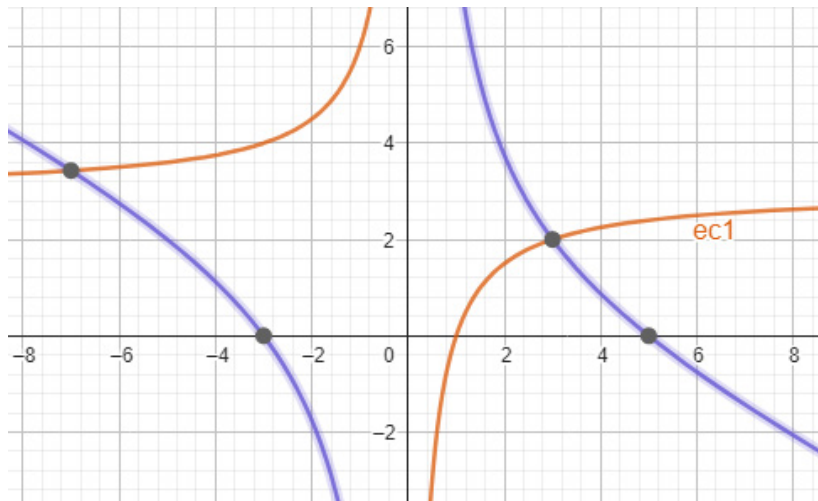
$$2\left(\frac{68}{9}\right) - y^2 = 8; \quad \frac{136}{9} - 8 = y^2; \quad y = \pm \sqrt{\frac{64}{9}}; \quad y_1 = -\frac{8}{3}, \quad y_2 = \frac{8}{3}$$

Los puntos de intersección de las curvas son:

$$P_1\left(-\frac{2\sqrt{17}}{3}, \frac{8}{3}\right), P_2\left(-\frac{2\sqrt{17}}{3}, -\frac{8}{3}\right), P_3\left(\frac{2\sqrt{17}}{3}, \frac{8}{3}\right), P_4\left(\frac{2\sqrt{17}}{3}, -\frac{8}{3}\right)$$

OTROS SISTEMAS QUE SE PUEDEN RESOLVER POR SUMA Y RESTA

Ejemplo 3. $xy - 3x = -3$
 $x^2 + 2xy - 2x = 15$



Por suma y resta se reducen los términos "xy":

$$-2 \begin{cases} -3x = -3 \\ \underline{x^2 + 2xy - 2x = 15} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2xy + 6x = 6 \\ x^2 + 2xy - 2x = 15 \\ \hline x^2 + 4x = 21 \end{array}$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0; (x + 7)(x - 3) = 0; x_1 = -7, x_2 = 3$$

$$-7y - 3(-7) = -3; 21 + 3 = 7y; y_1 = \frac{24}{7}$$

$$3y - 3(3) = -3; 3y = -3 + 9; y_2 = \frac{6}{3}; y_2 = 2$$

Los puntos en los que se intersectan las curvas son:

$$P_1\left(-7, -\frac{24}{7}\right) \text{ y } P_2(3, 2)$$

Ejercicios:

$$1. \quad \begin{aligned} 3x^2 + y^2 + 2y &= 9 \\ 2x^2 + 3y^2 + 3y &= 10 \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} 9x^2 + y^2 &= 9 \\ 2x - y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + x - 2y &= 9 \\ x^2 + y^2 - 2x &= 1 \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} xy &= 6 \\ x^2 + y^2 &= 13 \end{aligned}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

Ejercicio 1. Encuentre las intersecciones de los círculos cuyas ecuaciones son $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ y $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

Ejercicio 2. Una roca es dejada caer al agua y se precipita a una velocidad definida por $16t^2$ en "t" segundos. Si el sonido al caer al agua se escucha 3.5 segundos más tarde y la velocidad del sonido es 1,078 ft/seg, ¿Cuál es la altura desde donde se dejó caer la roca?

Fuente: Swokowsky & Cole. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, 12ª Edición. CENGAGE Learning.

ECUACIONES QUE CONTIENEN RADICALES DE SEGUNDO ORDEN

Si los cuadrados de dos cantidades son iguales entre sí, se puede decir que *una raíz de una ecuación dada puede ser raíz de otra ecuación que resulte de igualar los cuadrados de los dos miembros de la ecuación propuesta*. (Definición adaptada de <https://www.coursehero.com/>)

Lo proposición anterior no necesariamente es válida a la inversa. Veamos un ejemplo para ilustrar esto:

Ejemplo 1. $y = \sqrt{2y^2 - 1}$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación para reducir el radical, la ecuación se reduce a $y^2 = 2y^2 - 1$

$$1 = 2y^2 - y^2 = y^2$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros y considerando que hay dos posible cuadrados que resultan en 1, tenemos $y = \pm\sqrt{1}; y_1 = 1, y_2 = -1$ como posibles raíces de la ecuación. Si verificamos ambas en la ecuación original tenemos:

$$1 = \sqrt{2(1)^2 - 1}; 1 = \sqrt{2-1}; 1 = 1, \therefore y_1 = 1 \text{ es una raíz real de la ecuación}$$

$$-1 = \sqrt{2(1)^2 - 1}; -1 = \sqrt{2-1}; -1 \neq 1, \therefore y_2 = -1 \text{ es una raíz extraña de la ecuación}$$

Para resolver ecuaciones que contienen uno o más radicales de segundo orden se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Se deja una raíz en un lado de la ecuación transponiendo todos los demás términos al otro lado.
2. Se elevan ambos miembros de la ecuación al cuadrado.
3. Si la ecuación que resulta no contiene radicales, se resuelve para la variable. Si por el contrario quedan uno o más radicales, se vuelve a repetir los primeros dos pasos hasta obtener una ecuación sin radicales y se pueda resolver la ecuación para la variable.
4. Se verifican las soluciones en la ecuación original para determinar cuáles son reales y cuáles no.

Al proceso de dejar una ecuación libre de radicales se le llama racionalizar la ecuación.

Ejemplo 2. $\sqrt{x} = 2x - 6$

$$(\sqrt{x})^2 = (2x - 6)^2$$

$$x = 4x^2 - 24x + 36; 4x^2 - 23x + 36 = 0$$

$$(4x - 9)(x - 4) = 0; x_1 = \frac{9}{4}, x_2 = 4$$

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = 2\left(\frac{9}{4}\right) - 6; \frac{3}{2} \neq -\frac{3}{2}; \therefore x = \frac{9}{4} \text{ es solución extraña}; \sqrt{4} = 2(4) - 6; 2 = 2; \therefore x = 4 \text{ es raíz}$$

Ejemplo 3.

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$$

$$\sqrt{3x+1} = \sqrt{x-1} + 2$$

$$(\sqrt{3x+1})^2 = (\sqrt{x-1} + 2)^2$$

$$3x+1 = x-1 + 4\sqrt{x-1} + 4$$

$$2x-2 = 4\sqrt{x-1}; x-1 = 2\sqrt{x-1}$$

$$(x-1)^2 = (2\sqrt{x-1})^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4x - 4; x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-5)(x-1) = 0; x_1 = 1, x_2 = 5$$

$$\sqrt{3(1)+1} - \sqrt{1-1} = 2; \sqrt{4} = 2; 2 = 2 \therefore x_1 = 1 \text{ es raíz de la ecuación}$$

$$\sqrt{3(5)+1} - \sqrt{5-1} = 2; \sqrt{16} - \sqrt{4} = 2; 4 - 2 = 2; 2 = 2 \therefore x_2 = 5 \text{ es raíz de la ecuación}$$

Ejercicios:

$$1. \quad \sqrt{3x-7} + \sqrt{2x-1} = 0$$

$$2. \quad \sqrt{1-2z+2z^2} + 3 - 2z = 0$$

$$3. \quad \sqrt{11y-6} + \sqrt{y-1} = \sqrt{4y+5}$$

$$4. \quad \sqrt{3x+12} - \sqrt{x^2+4x-8} = 0$$

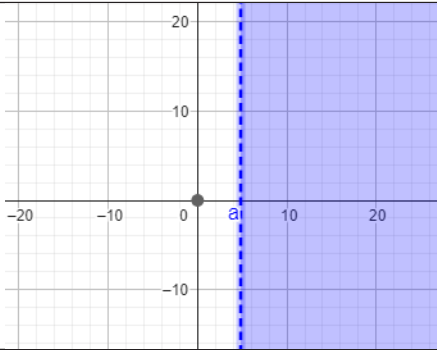
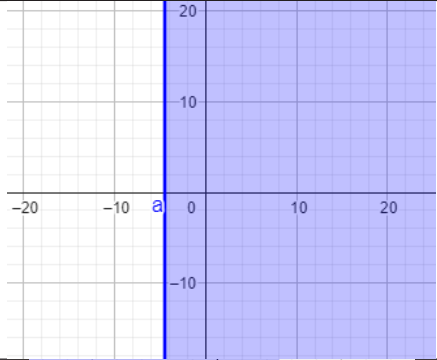
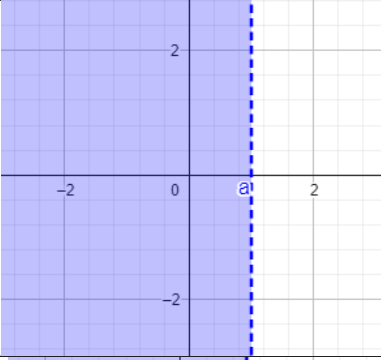
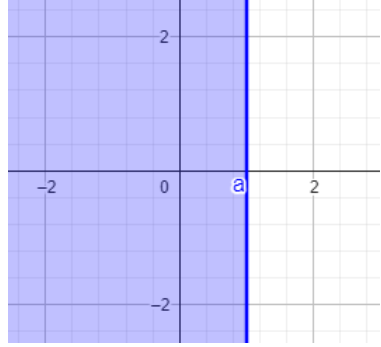
DESIGUALDADES O INECUACIONES

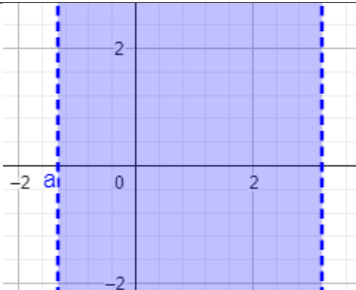
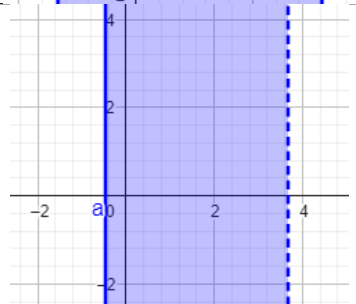
En los temas anteriores se estuvieron resolviendo ecuaciones de diferentes tipos, tendiendo todas ellas en común el hecho de que consisten en la igualdad entre dos expresiones.

En ocasiones puede darse el caso de que dos expresiones algebraicas no sean iguales entre sí, sino que una sea mayor que la otra. Es posible escribir este tipo de proposiciones de desigualdad simbólicamente y encontrar condiciones para que dichas proposiciones sean válidas, utilizando procesos muy parecidos a los que se han utilizado para resolver ecuaciones.

En resumen, una desigualdad es una proposición en la cual una cantidad real es mayor que otra. Si

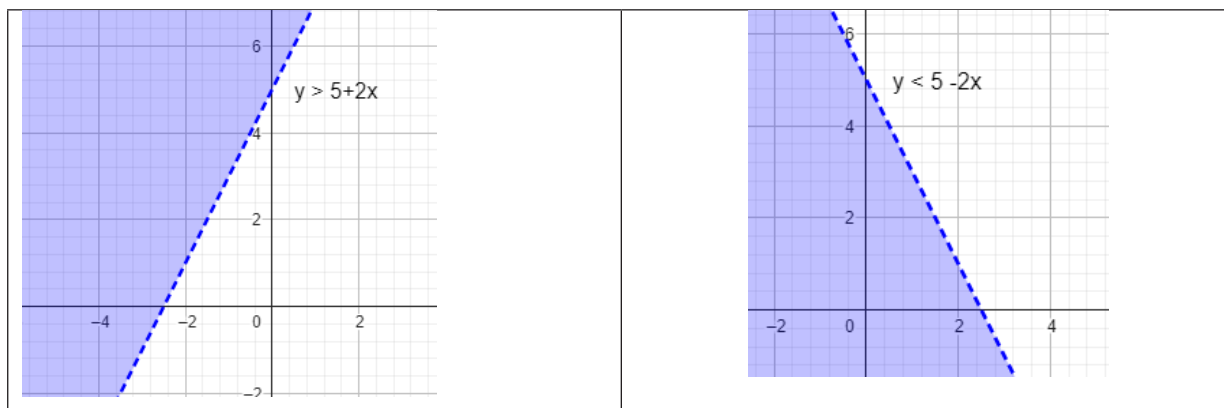
resulta que la desigualdad es *válida para todos los valores reales de la variable*, es una *desigualdad absoluta*; si es *válida sólo para algunos de los valores de la variable*, es una *desigualdad condicional*.

Relación como desigualdad	Relación como intervalo	Gráficamente
$x > a$	(a, ∞)	
$x \geq a$	$[a, \infty)$	
$x < a$	$(-\infty, a)$	
$x \leq a$	$(-\infty, a]$	

$a < x < b$	(a, b)	
$a \leq x < b$	$[a, b)$	

REGIONES EN EL PLANO

Como se ilustra en el cuadro anterior, una desigualdad expresada en términos de "x" representa regiones entre líneas verticales, en algunas de las cuales se incluyen o no, los extremos. Si la desigualdad se presenta como una relación entre dos variables lineales (primer grado), puede verse como lo muestran las siguientes figuras:



Para resolver una desigualdad se puede proceder de forma muy similar a la solución de una ecuación, con algunas diferencias que se describen a través de los siguientes principios.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

1. Si a una desigualdad se le suma o se le resta una misma cantidad en ambos miembros, la desigualdad no cambia de sentido; es decir, no se altera.
2. Si a una desigualdad se le multiplica o se le divide ambos miembros por una misma cantidad positiva, la desigualdad no cambia de sentido; es decir, no se altera.
3. Si a una desigualdad se le multiplica o divide ambos miembros por una cantidad negativa, el sentido de la desigualdad se invierte, es decir, se altera.

SOLUCIÓN DE DESIGUALDADES CONDICIONALES O INECUACIONES

Ejemplo 1: Encontrar las condiciones para que la siguiente desigualdad sea válida:

$$2x + 3 > 5x - 9$$

Esta es una desigualdad de primer grado (por el exponente mayor que tiene) donde inicialmente se transponen términos tal y como se haría en una ecuación.

$$3 + 9 > 5x - 2x$$

$12 > 3x$ o bien $3x < 12$. Nótese que se cambió la posición de los términos pero la desigualdad sigue teniendo el mismo sentido en relación con ellos, es decir la cantidad menor sigue siendo $3x$ en ambas.

Finalmente dividimos toda la desigualdad por 3 y tenemos que $x < 4$.

Para verificar, se puede sustituir en la proposición original cualquier cantidad real que sea menor a 4 y se debe cumplir que $2x + 3 > 5x - 9$.

Esta solución se puede expresar de forma gráfica en una recta numérica marcando todos los valores posibles en ella y el sentido en el que éstos pueden extenderse.



También se puede expresar como el intervalo de valores $(-\infty, 4)$ que significa que la variable puede tomar desde cualquier valor inmensamente grande negativo, hasta poco menos que 4.

Nótese que al decir "menor que 4", en la gráfica el punto límite queda abierto y en el intervalo se expresa mediante un paréntesis, que significa en ambos casos que el valor no se incluye, aunque se le pueda acercar mucho.

Ejemplo 2:

$$5 - \frac{3}{2}x \leq 8$$

; multiplicando toda la desigualdad por 2 para reducir el denominador

$$10 - 3x \leq 16$$

; restando 10 en ambos miembros

$$-3x \leq 6$$

; dividiendo por -3 se debe invertir el sentido de la desigualdad y obtener la solución

$x \geq -2$ como desigualdad, $[-2, \infty)$ como intervalo de valores y como gráfica el resultado se representa:



Ejercicios: Resolver las siguientes desigualdades y mostrar los resultados como desigualdad, como intervalo y gráficamente:

1. $4x+1 < 7x+9$

2. $\frac{6x-1}{2} > \frac{x+11}{5}$

3. $\frac{5x+2}{-6} > \frac{1-7x}{5}$

DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

Recordando el concepto del valor absoluto de una cantidad, se refiere a las unidades que tiene independientemente del sentido, así, por ejemplo:

$x \geq 5$ se interpreta como ¿cuáles son los números cuyo valor absoluto es mayor o igual a 5?

De la definición de valor absoluto, hay que considerar que puede haber dos posibles soluciones, una parte positiva y una parte negativa, que respondan a dicha pregunta, es decir:

$x \geq 5$ si x puede ser positivo o negativo tenemos ahora dos posibilidades:

$x \geq 5$ y $-x \geq 5$, la primera es directamente parte de la solución y en la segunda, cambiando el signo e invirtiendo la desigualdad, $x \leq -5$, escribiendo como una sola desigualdad que resume todo:

$$-5 \leq x \leq 5$$



$$(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$$

En resumen, si $x > c$, donde c es una constante, entonces $x < -c$ y $x > c$ $(-\infty, -c) \cup (c, \infty)$



Y si $x < c$, donde c es cualquier constante, entonces $x < c$ y $x > -c$, es decir $-c < x < c$

O bien, $(-c, c)$



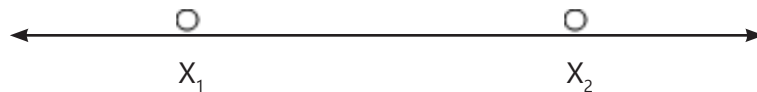
Ejercicios: Resolver las siguientes desigualdades y mostrar los resultados como desigualdad, como intervalo y gráficamente:

1. $3x - 1 > 5$
2. $5 - 2x < 11$
3. $3h < 21$

DESIGUALDADES DE SEGUNDO GRADO

Una desigualdad de segundo grado puede tener la forma $ax^2 + bx + c$ en uno de sus miembros y todas las posibles formas de desigualdad ya revisadas ($> 0, \geq 0, < 0, \leq 0$). Un método para analizar las posibles soluciones de este tipo de desigualdades consiste en:

1. Primero resolver como si fuera una ecuación, encontrando las raíces o puntos de intersección de la parábola, X_1 y X_2 y que determinan cuáles son los posibles intervalos de solución de la desigualdad.



2. Determinar los tres intervalos en los que puede encontrarse la solución:

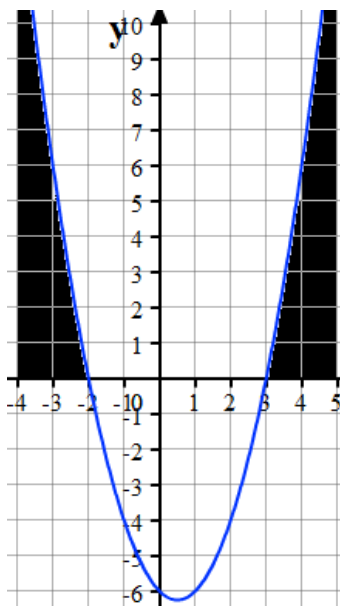
Desde $-\infty$ hasta x_1 , desde x_1 hasta x_2 y finalmente desde x_2 hasta ∞

3. Sustituir valores dentro de cada intervalo en la desigualdad original para probar cuáles son los que cumplen con sus condiciones.

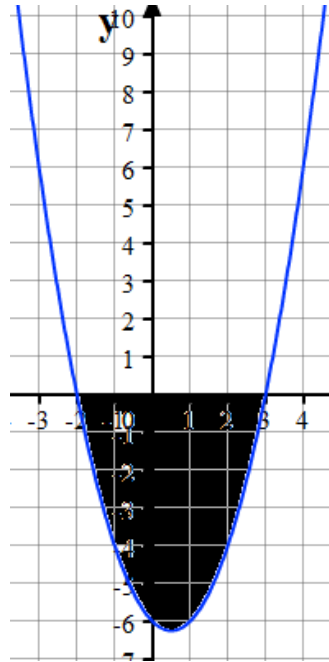
Mediante el ensayo y el análisis se puede determinar el o los intervalos que son la solución de la desigualdad.

En general pueden suceder los casos:

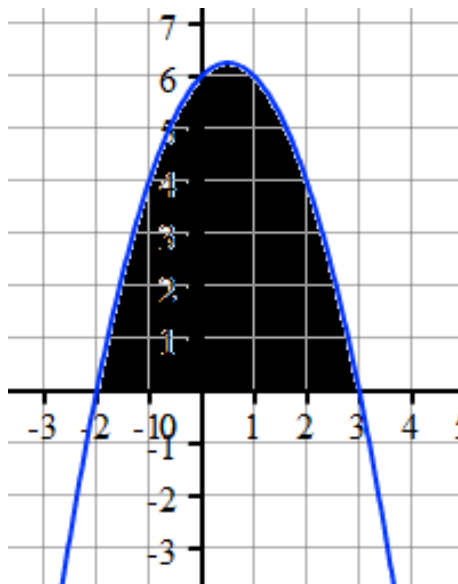
Caso I: Buscar la región formada por una parábola vertical abierta hacia arriba y por encima del eje "x". La solución es del tipo $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$



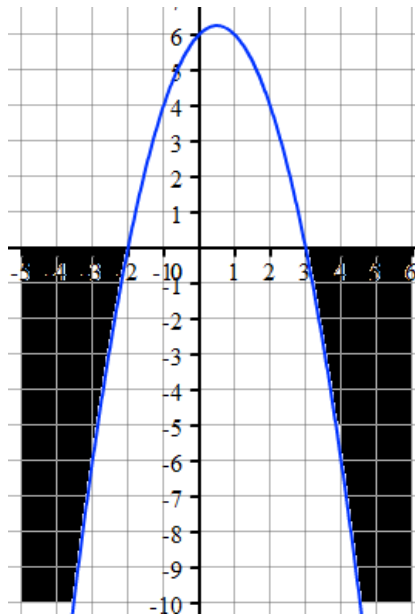
Caso II: Buscar la región formada por una parábola vertical abierta hacia arriba y por debajo del eje "x". La solución en este caso es del tipo (x_1, x_2)



Caso III: Buscar la región formada por una parábola vertical abierta hacia abajo y por encima del eje "x". La solución es del tipo (x_1, x_2)



Caso IV: Buscar la región formada por una parábola vertical abierta hacia abajo y por debajo del eje "x". La solución en este caso es del tipo $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$



Ejemplo 1: Hallar los intervalos de los valores de la variable para los cuales: $x^2 - 8x + 15 \geq 0$

$$(x-3)(x-5) \geq 0$$

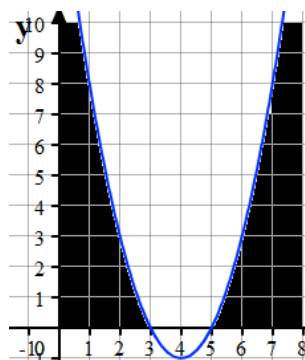
Si fuera una ecuación, sus raíces serían: $x-3=0$; $x=3$ y $x-5=0$; $x=5$

Con esto se tiene tres posibles intervalos: $(-\infty, 3]$, $[3, 5]$, $[5, \infty)$

Dado que la ecuación corresponde a una parábola abierta hacia arriba y al buscar valores de "y" positivos o cero, asumimos que los intervalos adecuados son los de los extremos:

$$(-\infty, 3] \cup [5, \infty), \text{ es decir } 3 \leq x \leq 5$$

Gráficamente:



Ejercicios: Diversos casos de desigualdades cuadráticas.

1. $9x^2 - 36 < 0$

2. $4x^2 + 12x + 9 < 0$

3. $-2x^2 + 10x \geq 0$

DESIGUALDADES RACIONALES

A diferencia de una función polinomial, que puede ser positiva, negativa o cero para todos los números reales, una función polinomial además puede ser indefinida para un valor de cero en el denominador. De esa forma, hay que tener cuidado de los valores de la variable que no deben tomarse para evitar esta indefinición.

Ejemplo 1.

$$\frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-1} < 0$$

$$\frac{5(x-1) + 3(x+3)}{(x+3)(x-1)} < 0$$

$$\frac{5x - 5 + 3x + 9}{(x+3)(x-1)} < 0$$

$$\frac{8x - 4}{(x+3)(x-1)} \cdot \frac{1}{4} < 0 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{2x - 1}{(x+3)(x-1)} < 0$$

Resolviendo cada factor del denominador y el del numerador tenemos los siguientes puntos que cortan el dominio en cuatro porciones:

$$x = -3, x = \frac{1}{2}, x = 1; (-\infty, -3), (-3, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1), (1, \infty)$$

Sustituyendo un valor en cada intervalo y evaluando la fracción para verificar el signo, tenemos:

$$x = -4 : \frac{2(-4) - 1}{(-4+3)(-4-1)} < 0; \frac{-9}{(-1)(-5)} < 0; -\frac{9}{5} < 0; \text{SI, este intervalo cumple}$$

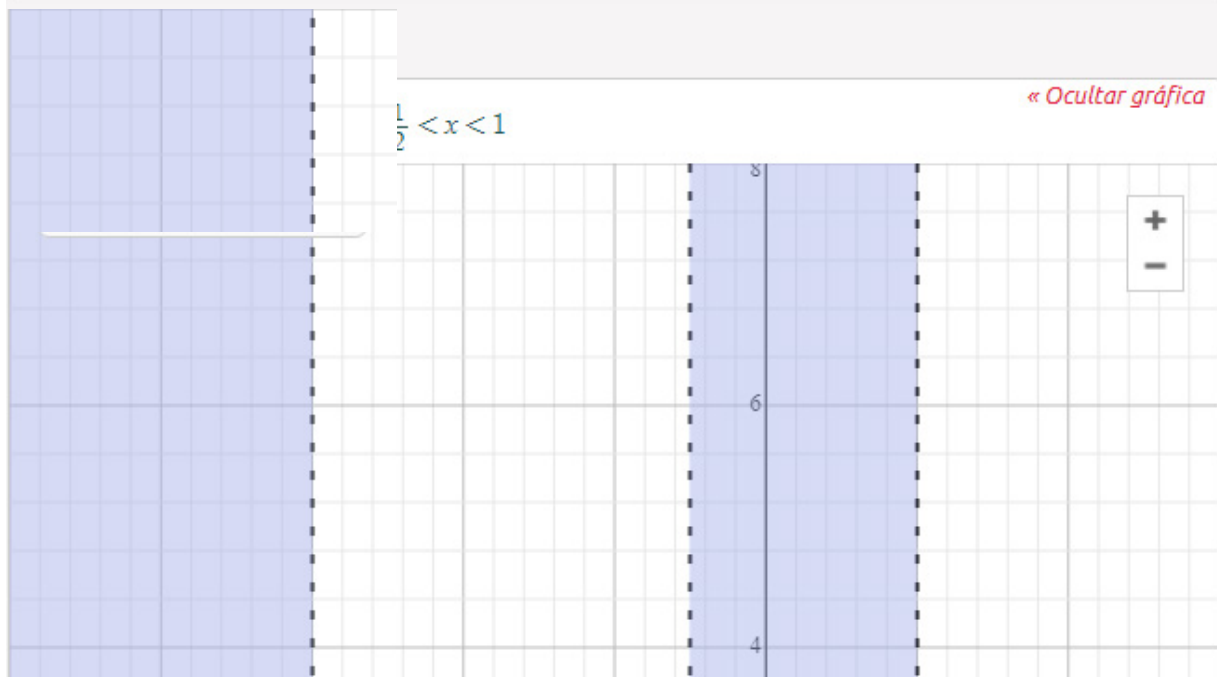
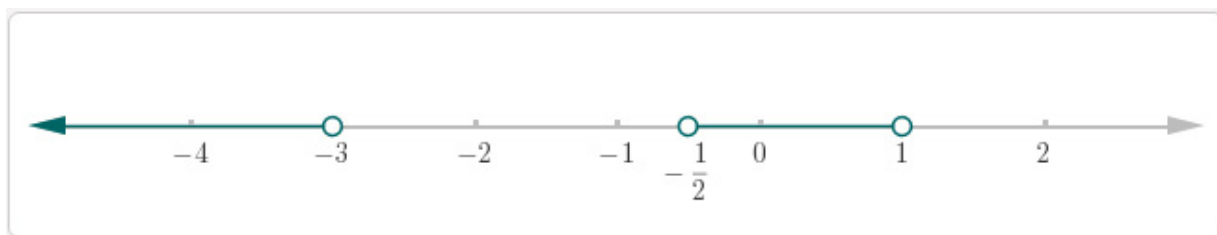
$$x = 0 : \frac{2(0) - 1}{(0+3)(0-1)} < 0; \frac{-1}{(3)(-1)} < 0; \frac{1}{3} < 0; \text{NO, este intervalo no cumple}$$

$$x = \frac{3}{4} : \frac{2\left(\frac{3}{4}\right) - 1}{\left(\frac{3}{4} + 3\right)\left(\frac{3}{4} - 1\right)} < 0; \frac{\frac{2}{4}}{\left(\frac{15}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)} < 0; -\frac{8}{15} < 0; \text{SI, este intervalo cumple}$$

$$x = 2 : \frac{2(2) - 1}{(2 + 3)(2 - 1)} < 0; \frac{3}{(5)(1)} < 0; \frac{3}{5} < 0; \text{NO, este intervalo no cumple}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$(-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$



Gráfica realizada en Symbolab.

Ejemplos >

1. $\frac{x + 1}{x - 3} \leq -1$

2. $x \leq 3 - \frac{6}{x + 2}$

3. $\frac{x}{x^2 - 1} > 0$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN E DESIGUALDADES POLINIOMIALES, CON VALOR ABSOLUTO Y RACIONALES

Problemas adaptados de: Álgebra, trigonometría y geometría analítica 3ra Edición. Zill & Dewar, Mc Graw Hill.

Ejercicios:

- 1) A un vendedor se le pagan \$150,000 al año más un 8% de comisión sobre sus ventas. ¿Cuáles serían sus ventas si su ingreso total estaría entre \$230,000 y \$270,000?

- 2) En dos exámenes, Juan obtuvo calificaciones de 71 y 82 puntos de 100. ¿Cuánto debe sacar en el tercer examen si quiere tener un promedio igual o superior a 80?

- 3) Se diseña una balanza con una precisión hasta 0.25 onzas. Si en la balanza se colocan dos latas idénticas que tienen un peso combinado de 38.15 onzas. ¿Cuál es el mayor y el menor peso posible de las latas?

- 4) Si 5 veces el cuadrado de un número se reduce en 3, el resultado es mayor que 42. ¿Qué puede determinarse sobre ese número?

- 5) Una caja de base cuadrada debe tener un volumen de 625 cm³. Determine cuánto mide cada lado de la base si su altura debe ser menor a 25 cm.

TRIGONOMETRÍA

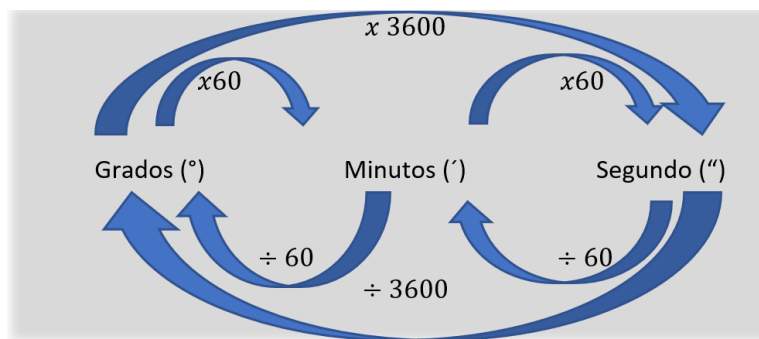
Es el giro o cantidad de rotación que hay que recorrer, desde un segmento de recta a otro segmento, llamado lado final del ángulo. La rotación se da sobre un punto llamado vértice.

Para profundizar en la comprensión de este concepto vaya al enlace siguiente y experimente haciendo las modificaciones que crea necesarias: <https://www.geogebra.org/m/ZGW8AQbF>

SISTEMA SEXAGESIMAL

La unidad principal es el grado, que se define como $\frac{1}{360}$ de circunferencia, es decir, cuando un punto rota manteniendo una distancia fija a otro, al volver a la posición original, recorrió 360 grados (360°).

El grado se divide a su vez en 60 minutos y el minuto a su vez en 60 segundos, de ahí que el sistema reciba ese nombre de sexagesimal.



Ejemplos:

- Convertir $125^\circ 12' 35''$ a grados.

$$\begin{aligned} 35'' \left[\frac{1'}{60''} \right] &= 0.58333... ' \\ 12.5833... ' \left[\frac{1^\circ}{60'} \right] &= 0.2097222...^\circ \\ 125^\circ 12' 35'' &\approx 125.2097^\circ \end{aligned}$$

- Convertir 205.86° a grados, minutos, segundos

$$\begin{aligned} 0.86^\circ \left[\frac{60'}{1^\circ} \right] &= 51.6' \\ 0.6' \frac{60''}{1'} &= 36'' \\ 205.86^\circ &= 205^\circ 51' 36'' \end{aligned}$$

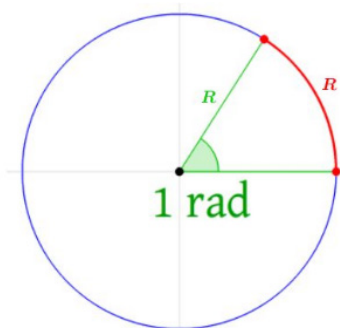
SISTEMA CIRCULAR

La unidad en el sistema circular es el radián. Un radián (rad) es el ángulo que se forma al trazar un arco de longitud similar al radio de la circunferencia. En una circunferencia hay 2π radianes. O sea que:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ (\text{1 circunferencia})$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ (\text{media circunferencia})$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.2958^\circ$$



Ejemplos:

1. Convertir $115^\circ 36' 52''$ a radianes

$$52'' \left[\frac{1'}{60''} \right] = 0.866...'$$

$$36.866...' \left[\frac{1^\circ}{60'} \right] = 0.6144...^\circ$$

$$115^\circ 36' 52'' \approx 115.6134...^\circ$$

$$115.61344...^\circ \left[\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right] \approx 2.0178 \text{ rad}$$

2. Convierta 495° a radianes.

$$495^\circ \left[\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right] = \frac{11}{4} \delta \text{ rad}$$

Liga a video con ejemplos complementarios: <https://youtu.be/IDD9un5n418>

ÁNGULOS TÍPICOS Y PARES COMUNES DE ÁNGULOS

Ángulo agudo: $0^\circ < \theta < 90^\circ$

Ángulo recto: $\theta = 90^\circ$

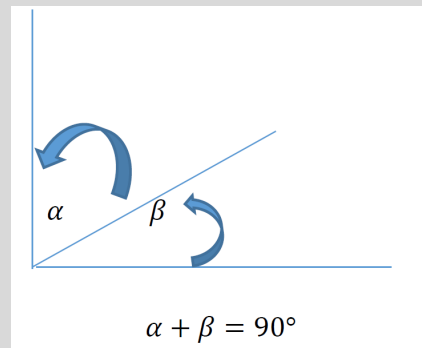
Ángulo obtuso: $90^\circ < \theta < 180^\circ$

Ángulo llano: $\theta = 180^\circ$

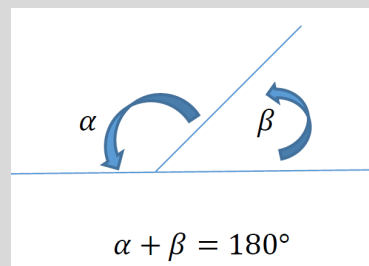
Ángulo entrante: $180^\circ < \theta < 360^\circ$

Ángulo perigonal: $\theta = 360^\circ$

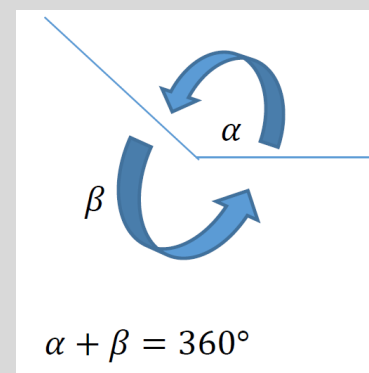
Ángulos complementarios son los que suman 90° o un recto.



Ángulos suplementarios son los que suma 180° o un ángulo llano.



Ángulos conjugados son los que suma 360° o un ángulo perigonal.



Ejemplos: Ángulos complementario y suplementarios en los diversos sistemas.

1. Hallar el ángulo complementario de $15^{\circ}36'54''$

$$\begin{aligned}\beta &= 90^{\circ} - 15^{\circ}36'54'' \\ &= 89^{\circ}59'60'' - \\ &\quad \underline{15^{\circ}36'54''} \\ \hat{a} &= 74^{\circ}23'06''\end{aligned}$$

2. Hallar el suplemento de $\frac{5}{6}\pi$

$$\beta = \pi - \frac{5}{6}\pi ; \hat{a} = \frac{1}{6}\delta \text{ rad}$$

3. La relación entre un ángulo y su conjugado es 5 a 1. ¿Cuál es el valor de ambos ángulos en grados?

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{1} ; \alpha = 5\beta$$

$$\alpha + \beta = 360^{\circ}$$

$$5\beta + \beta = 360^{\circ}; 6\beta = 360^{\circ} ; \hat{a} = 60^{\circ}$$

$$\alpha = 5(60^{\circ}); \hat{a} = 300^{\circ}$$

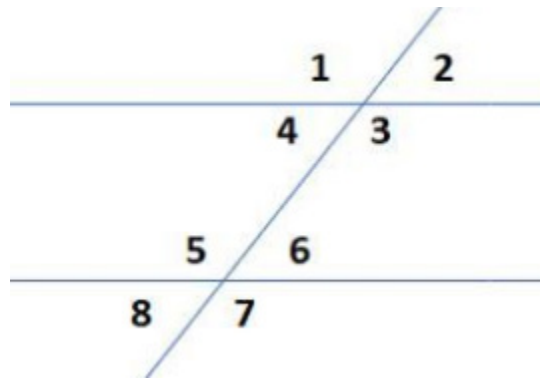
Ejercicios:

- Un ángulo A es complementario de B. Si $A = 5x + 10^{\circ}$, hallar ambos.
- Un ángulo es el 76% de su suplemento. ¿Cuánto valen ambos?

3. Un ángulo vale el triple de su conjugado adicionado 15° . ¿Cuánto valen ambos ángulos?

DOS RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL

Cuando una recta corta a un par de rectas paralelas, se forman ocho ángulos. Todos los pares de consecutivos son suplementarios (R_1 y R_2 , R_2 y R_3 , R_3 y R_4 y R_1 y R_4 e igual para $5, 6, 7$ y 8).



Los ángulos opuestos por el vértice son iguales entre sí.

Son opuestos por el vértice: $R_1 = R_3$, $R_2 = R_4$, $R_5 = R_7$ y $R_6 = R_8$

Los ángulos alternos internos son iguales entre sí.

Son alterno internos: $R_3 = R_5$ y $R_4 = R_6$

Los ángulos alternos externos son iguales entre sí.

Son alterno externos: $R_1 = R_7$ y $R_2 = R_8$

Los ángulos correspondientes son iguales entre sí.

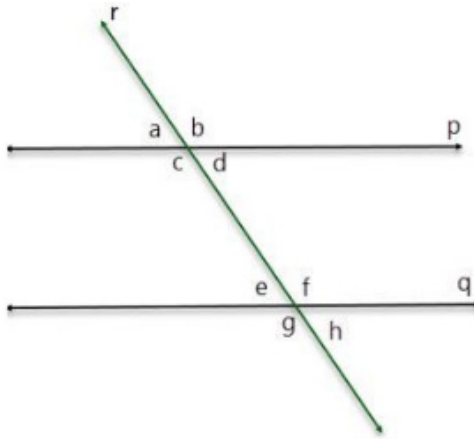
Son ángulos correspondientes: $R_1 = R_7$, $R_2 = R_8$, $R_3 = R_5$ y $R_4 = R_6$

En síntesis y por todas las razones anteriores:

$$R_1 = R_3 = R_5 = R_7 \text{ y } R_2 = R_4 = R_6 = R_8$$

Ejemplo 1:

Si $a = 43^\circ$, hallar los demás ángulos de la figura:



R_a y R_b son adyacentes y suplementarios $\therefore R_b = 180^\circ - R_a$; $R_b = 137^\circ$

$R_c = R_b$ porque son opuestos por el vértice : $R_c = 137^\circ$

$R_d = R_a$ porque son opuestos por el vértice : $R_d = 43^\circ$

$R_e = R_a$ porque son correspondientes : $R_e = 43^\circ$

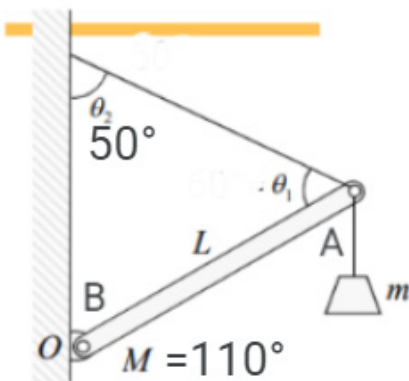
$R_f = R_c$ porque son alternos internos : $R_f = 137^\circ$

$R_g = R_b$ porque son alternos externos : $R_g = 137^\circ$

$R_h = R_a$ porque son alternos externos : $R_h = 43^\circ$

Ejercicio: Aplicación del concepto de rectas paralelas y una recta transversal.

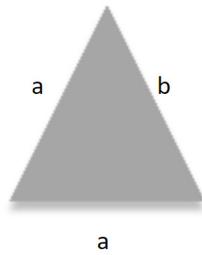
Hallar los valores de los ángulos A y θ_1 de la figura (demostrar su valor de acuerdo a los datos):



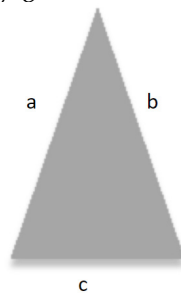
TRIÁNGULOS, CLASIFICACIÓN

Según sus lados, los triángulos se pueden clasificar en:

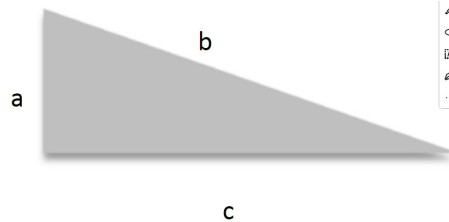
Equilátero: Tiene los tres lados y sus tres ángulos iguales: $a = b = c$



Isósceles: Tiene dos lados iguales: $a = b ; a \neq b$

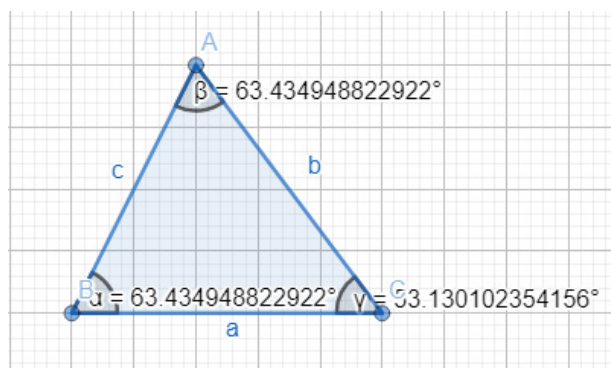


Escaleno: todos sus lados son diferentes: $a \neq b \neq c$

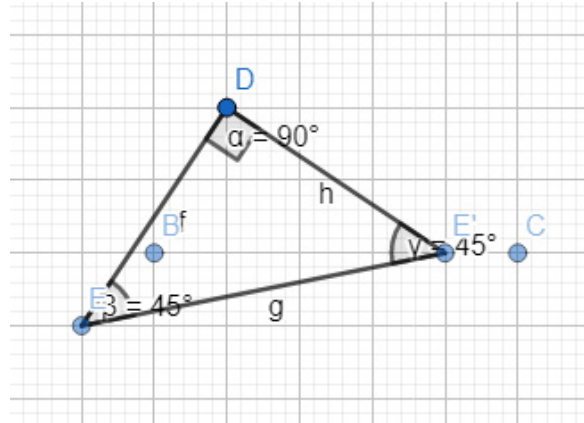


Según sus ángulos, los triángulos se pueden clasificar en:

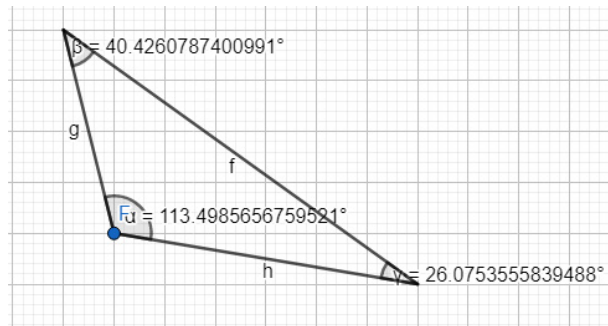
Acutángulos: Tiene sus tres ángulos agudos.



Rectángulos: Tiene un ángulo recto.



Obtusángulo: Tiene un ángulo obtuso, mayor a 90°



ALGUNAS PROPIEDADES RELEVANTES

La suma de los ángulos internos en todo triángulo es 180°

La suma de los ángulos externos en todo triángulo es 360°

Opuesto al ángulo mayor de un triángulo se encuentra su lado mayor y viceversa.

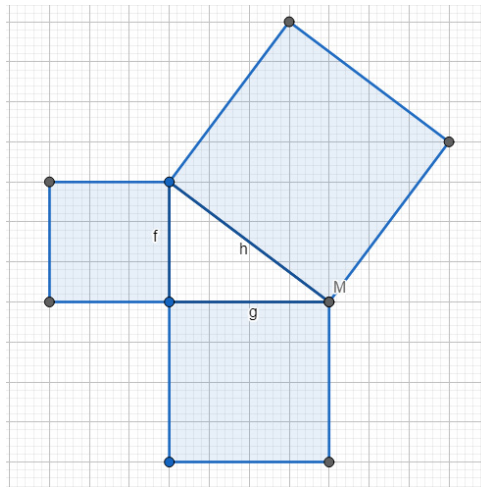
Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos lado y mayor que su diferencia.

$$a < b + c ; a > b - c$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, el lado mayor (opuesto al ángulo recto) se llama hipotenusa y a los lados menores se les llama catetos. El teorema de Pitágoras se puede enunciar de la siguiente forma:

“El área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos”.



Según la figura, el teorema de Pitágoras expresado en una ecuación sería: $h^2 = f^2 + g^2$

Para conocer un cuadrado menor, se obtendría la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del cateto conocido: $f^2 = h^2 - g^2$ o bien $g^2 = h^2 - f^2$

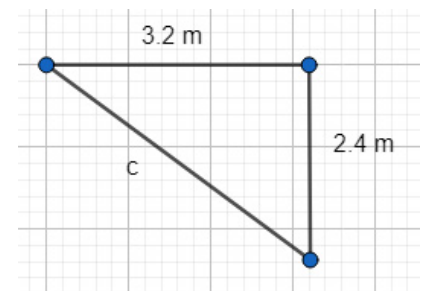
Liga a video con explicación complementaria sobre la fórmula del teorema de Pitágoras:

<https://youtu.be/bCQVyDUgFww?list=PLZ-y-OA5aHrMmRWo575vfseEHLndA1pKj>

Ejemplos de aplicación del teorema de Pitágoras con diferentes casos en los datos conocidos

1. Un carpintero tiene dos tablas, una de 3.2 m y otra de 2.4 m y las fija en ángulo recto. ¿De qué tamaño tendría que cortar una tercera tabla para cerrar un triángulo?

$$\begin{aligned}c^2 &= 3.2^2 + 2.4^2 \\c^2 &= 16 \\c &= \sqrt{16} ; c = 4 \text{ m}\end{aligned}$$



2. Un cable de retenida de 10 m se utiliza para un poste de 8 m de altura. Si el poste debe quedar perfectamente vertical, ¿a qué distancia de la base del poste debe colocarse el ancla del cable?



$$10^2 = 8^2 + i^2$$

$$i^2 = 100 - 64$$

$$i^2 = 36 ; i = 6 \text{ m}$$

Ligas a videos con ejemplos adicionales:

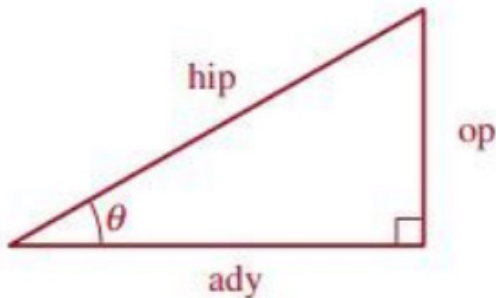
<https://youtu.be/8yoJ9pBbjTU>

<https://youtu.be/ohlzigHe8q0?list=PLZ-y-OA5aHrMmRWo575vfseEHLndA1pKj>

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas de un ángulo se pueden definir como el cociente o relación que existe entre dos lados de un triángulo rectángulo, expresada en forma de fracción o decimal.

Las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ son:



$$\text{Sen } \theta = \frac{op}{hip}$$

$$\text{Csc } \theta = \frac{hip}{op}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{ady}{hip}$$

$$\text{Sec } \theta = \frac{hip}{ady}$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{op}{ady}$$

$$\text{Cot } \theta = \frac{ady}{op}$$

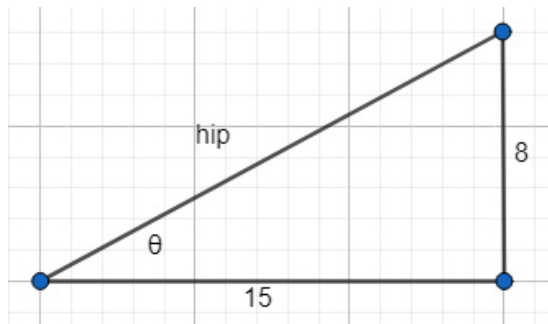
Observando con detenimiento el cuadro anterior se puede notar que hay pares de funciones que son recíprocas entre sí. Lo son seno y cosecante, coseno y secante y tangente y cotangente.

También hay otros pares de funciones llamadas cofunciones. El valor de una de ellas es igual al valor de la cofunción para el ángulo complementario (de ahí su nombre). Son cofunciones **seno** y **coseno**, **tangente** y **cotangente** y **secante** y **cosecante**.

Para comprender mejor cómo varían los valores de las funciones al largo de los diferentes cuadrantes, interactúe con la siguiente animación, poniendo atención en donde toman valores positivos y negativo, cuáles son sus valores máximos y mínimos e incluso en dónde las funciones son indefinidas.

<https://www.geogebra.org/m/MWKdkPPq>

Ejemplo 1: Determinar los valores de las funciones trigonométricas del ángulo indicado en la figura.



$$hip = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} ; hip = 17$$

$$Sen \theta = \frac{8}{17}$$

$$Cos \theta = \frac{15}{17}$$

$$Tan \theta = \frac{8}{15}$$

$$Cot \theta = \frac{15}{8}$$

$$Sec \theta = \frac{17}{15}$$

$$Csc \theta = \frac{17}{8}$$

Para determinar el valor de todas las funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo solo se necesita conocer el valor de una función (o razón) trigonométrica ya que automáticamente se puede conocer la recíproca o inversa y por medio del teorema de Pitágoras, hallar el tercer lado y conociendo los tres lados es posible conocer todas las demás funciones trigonométricas.

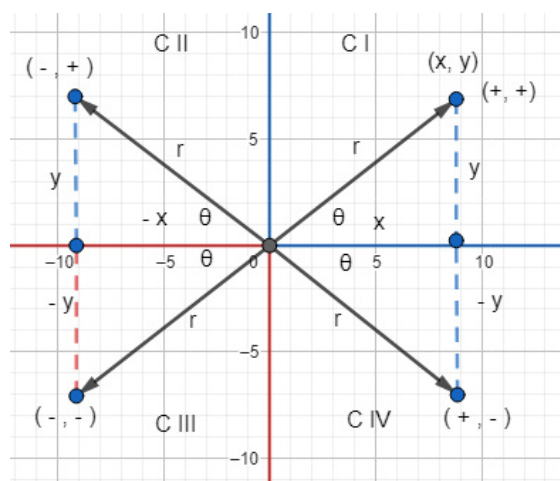
Cuando el triángulo no tiene una referencia determinada que implique una orientación específica, se considera que sus lados son valores absolutos. Pero cuando los lados que constituyen el triángulo se encuentran sobre una referencia que implique una orientación o es importante distinguir si están en una posición específica (arriba-abajo, izquierda-derecha o norte-sur, este-oeste), entonces se distinguen por medio de un signo.

Para comprender cómo son los criterios que determinan el signo de las funciones trigonométricas en cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano, hay que poner suma atención al aparatado siguiente; esto ayudará a evitar muchas dificultades al resolver problemas de este tipo, no solo en matemáticas sino en física y en aplicaciones de ingeniería en general.

SIGNOS Y VALORES DE LAS FUNCIONES EN LOS CUADRANTES

Un ángulo en posición normal se mide desde la dirección positiva del eje de las abscisas y en sentido contrario a las manecillas del reloj. Las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera que se obtenga al hacer rotar un segmento de recta alrededor del origen, si se conoce la longitud del segmento y su ángulo o rotación o bien si se conoce la coordenada (x,y) del extremo del segmento. A este segmento se le puede llamar "rayo", de longitud "r".

El signo de una función se debe al signo de "x" y de "y", que varía de cuadrante en cuadrante. A la distancia "r" que es obtenida de la suma de dos cuadrados, siempre se le considera positiva, de tal forma que la combinación de signos de (x,y) será la que defina el signo de las funciones.



Signos de las funciones trigonométricas.

$$\begin{aligned} \text{Sen } \theta &= \frac{y}{r} \\ \text{Cos } \theta &= \frac{x}{r} \\ \text{Tan } \theta &= \frac{y}{x} \\ \text{Cot } \theta &= \frac{x}{y} \\ \text{Sec } \theta &= \frac{r}{x} \\ \text{Csc } \theta &= \frac{r}{y} \end{aligned}$$

C I: Todas +

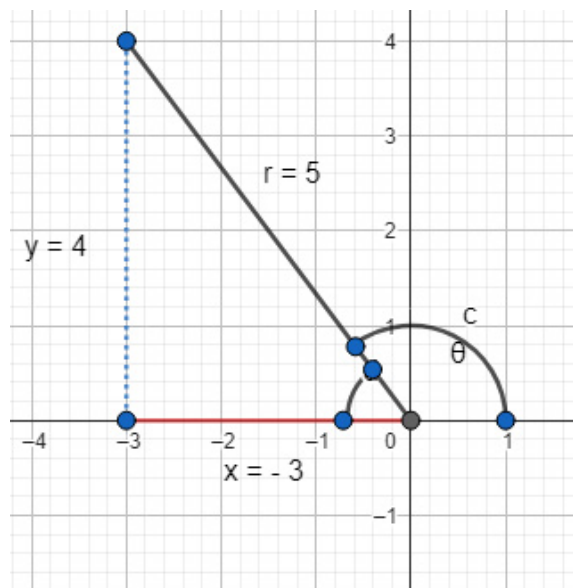
C II: Sen y Csc +

C III Tan y Cot +

C IV: Cos y Sec +

Ejemplo 1:

Dada la función $\text{Cos } \theta = -\frac{3}{5}$, hallar las demás funciones si θ está en el C II



$$x = -3, r = 5; y = \sqrt{5^2 - (-3)^2}; y = 4$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{4}{-3}$$

$$\text{Cot } \theta = \frac{-3}{4}$$

$$\text{Sec } \theta = \frac{5}{-3}$$

$$\text{Csc } \theta = \frac{5}{4}$$

VALORES DE LAS FUNCIONES PARA ÁNGULOS DE CUADRANTES (0°, 90°, 180° Y 270°)

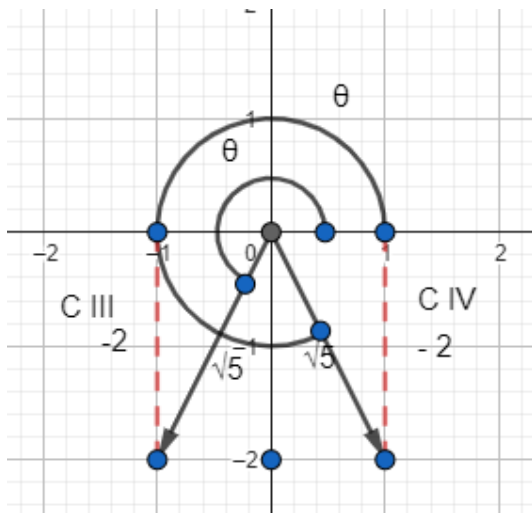
Para deducir los valores fácilmente recordemos que si rotamos un rayo "r" hasta colocarlo sobre los ángulos de cuadrante, entonces $r = y$ cuando $x = 0$ y $r = x$ cuando $y = 0$. Con estos valores definidos, podemos determinar los valores de las funciones, que se resumen en el siguiente cuadro:

Función	0° = 360° = 2π $x = r, y = 0$	90° = $\frac{\pi}{2}$ $x = 0, y = r$	180° = π $x = -r, y = 0$	270° = $\frac{3}{2}\pi$ $x = 0, y = -r$
$\text{Sen } \theta = \frac{y}{r}$	$\text{Sen } \theta = \frac{0}{r} = 0$	$\text{Sen } \theta = \frac{r}{r} = 1$	$\text{Sen } \theta = \frac{0}{r} = 0$	$\text{Sen } \theta = \frac{-r}{r} = -1$
$\text{Cos } \theta = \frac{x}{r}$	$\text{Cos } \theta = \frac{r}{r} = 1$	$\text{Cos } \theta = \frac{0}{r} = 0$	$\text{Cos } \theta = \frac{-r}{r} = -1$	$\text{Cos } \theta = \frac{0}{r} = 0$
$\text{Tan } \theta = \frac{y}{x}$	$\text{Tan } \theta = \frac{0}{r} = 0$	$\text{Tan } \theta = \frac{r}{0}$ = indet	$\text{Tan } \theta = \frac{0}{-r} = 0$	$\text{Tan } \theta = \frac{-r}{0}$ = indet
$\text{Cot } \theta = \frac{x}{y}$	$\text{Cot } \theta = \frac{r}{0} = \text{indet}$	$\text{Cot } \theta = \frac{0}{r} = 0$	$\text{Cot } \theta = \frac{-r}{0} = \text{indet}$	$\text{Cot } \theta = \frac{0}{-r} = 0$
$\text{Sec } \theta = \frac{r}{x}$	$\text{Sec } \theta = \frac{r}{r} = 1$	$\text{Sec } \theta = \frac{r}{0}$ = indet	$\text{Sec } \theta = \frac{r}{-r} = -1$	$\text{Sec } \theta = \frac{r}{0} = \text{indet}$
$\text{Csc } \theta = \frac{r}{y}$	$\text{Csc } \theta = \frac{r}{0} = \text{indet}$	$\text{Csc } \theta = \frac{r}{r} = 1$	$\text{Csc } \theta = \frac{r}{0} = \text{indet}$	$\text{Csc } \theta = \frac{r}{-r} = -1$

Ejemplo 1:

Dada la función $\text{Sen } \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, hallar todas las demás funciones posibles para el ángulo.

Nota: Al no contar con más información respecto a la posición del ángulo θ , debe considerarse que por el signo de la función seno, una solución puede ser para el tercer cuadrante (C III) o para el cuarto cuadrante (C IV). Deben obtenerse ambas para contemplar los dos escenarios.



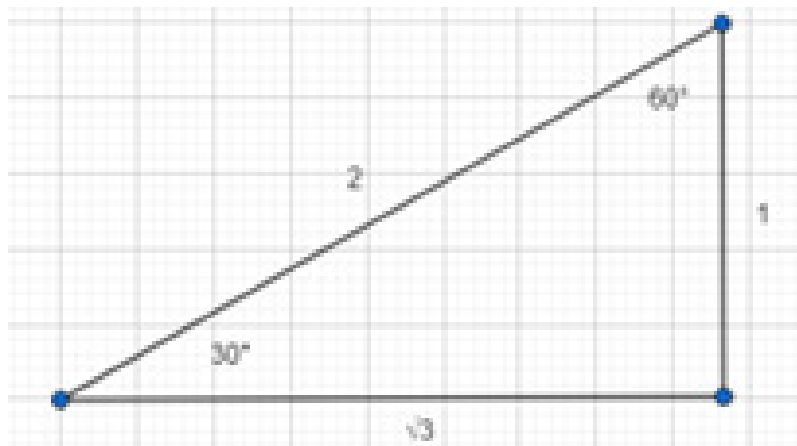
$$\text{Sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{\sqrt{5}}; x = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (-2)^2}; x = 1$$

C III	C IV
$\text{Cos } \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\text{Cos } \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
$\text{Tan } \theta = \frac{-2}{-1} = 2$	$\text{Tan } \theta = \frac{-2}{1} = -2$
$\text{Cot } \theta = \frac{1}{2}$	$\text{Cot } \theta = -\frac{1}{2}$
$\text{Sec } \theta = \frac{\sqrt{5}}{-1} = -\sqrt{5}$	$\text{Sec } \theta = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$
$\text{Csc } \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\text{Csc } \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

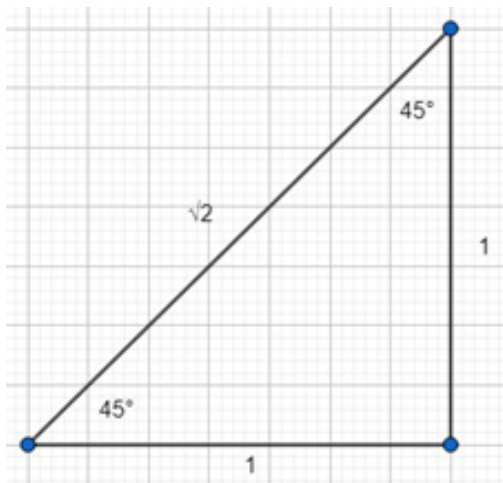
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES (30°, 45° Y 60°)

Muy seguramente usaste un juego geométrico para practicar y aprender tus primeros trazos geométricos. Este incluía dos escuadras, una que era un triángulo isósceles con dos ángulos de 45° y otra con ángulos de 30° y 60°. Estos valores de ángulos se obtienen con lados que guardan una relación fija entre sus lados que es conocida, de tal forma que podemos calcular los valores de las funciones trigonométricas para esos ángulos y para aquellos cuyo ángulo relacionado sea uno de ellos.

Los triángulos típicos que tienen esas relaciones se construyen así:



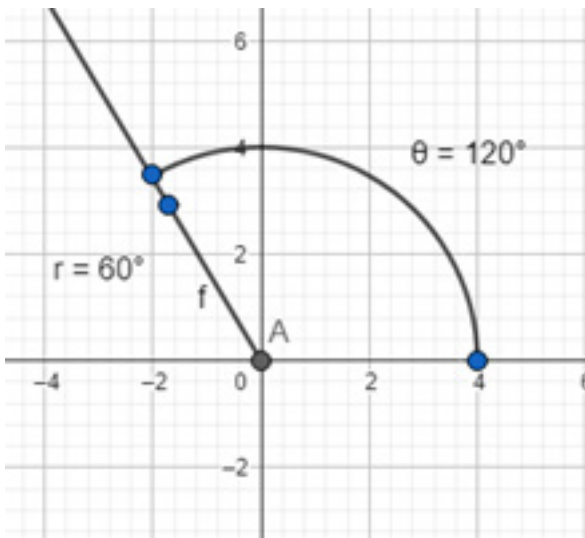
Funciones trigonométricas de 30° ($\frac{\pi}{6}$)		Funciones trigonométricas 60° ($\frac{\pi}{3}$)	
$Sen\ 30^\circ = \frac{1}{2}$	$Csc\ 30^\circ = \frac{2}{1} = 2$	$Sen\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$Csc\ 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$Cos\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$Sec\ 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$Cos\ 60^\circ = \frac{1}{2}$	$Sec\ 60^\circ = \frac{2}{1} = 2$
$Tan\ 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $= \frac{\sqrt{3}}{3}$	$Cot\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$Tan\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$Cot\ 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Funciones trigonométricas de 45° ($\frac{\pi}{4}$)	
$Sen\ 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$Csc\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
$Cos\ 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$Sec\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
$Tan\ 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$	$Cot\ 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$

No solamente se pueden calcular en forma exacta las funciones para 30° , 45° y 60° , también se pueden calcular las de todos los ángulos que, al trazarlos, tengan 30° , 45° o 60° con cualquier dirección del eje x. Si un ángulo nos es dado en estos valores o su relacionado es estos valores, se calcula así:

Ejemplo 1. Hallar el valor exacto de todas las funciones seno, coseno y tangente de $\theta = 120^\circ$

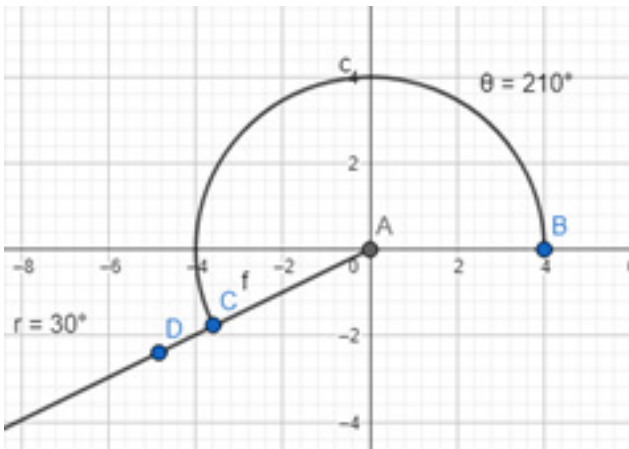


$$\text{Sen}120^\circ = \text{Sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos}120^\circ = -\text{Cos}60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Tan}120^\circ = -\text{Tan}60^\circ = \sqrt{3}$$

Ejemplo 2: Hallar el valor exacto de seno, coseno y tangente de $\theta=210^\circ$

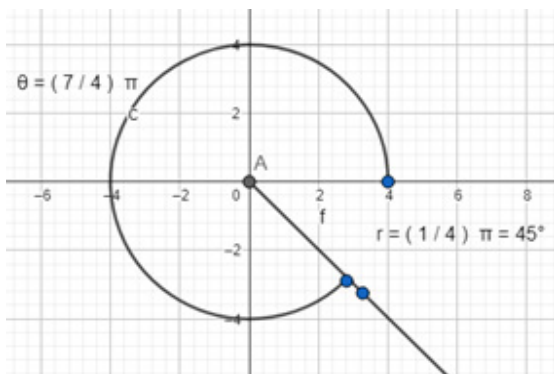


$$\text{Sen}210^\circ = -\text{Sen}30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Cos}210^\circ = -\text{Cos}30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Tan}210^\circ = \text{Tan}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 3: Hallar el valor de todas las funciones trigonométricas de $\theta=7/4 \pi$



$$\text{Sen} \frac{7}{4} \pi = -\text{Sen} \frac{\pi}{4} = -\text{Sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos} \frac{7}{4} \pi = \text{Cos} \frac{\pi}{4} = \text{Cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Tan} \frac{7}{4} \pi = -\text{Tan} \frac{\pi}{4} = -\text{Tan} 45^\circ = -1$$

$$\text{Cot} \frac{7}{4} \pi = -\text{Cot} \frac{\pi}{4} = -\text{Tan} 45^\circ = -1$$

$$\text{Sec} \frac{7}{4} \pi = \text{Sec} \frac{\pi}{4} = \text{Sec} 45^\circ = \sqrt{2}$$

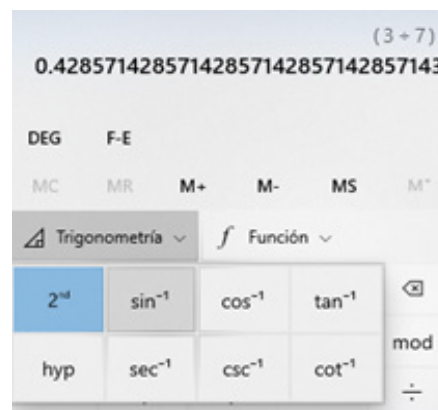
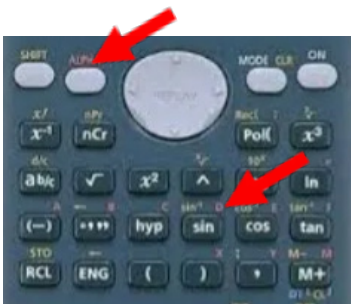
$$\text{Csc} \frac{7}{4} \pi = -\text{Csc} \frac{\pi}{4} = -\text{Csc} 45^\circ = -\sqrt{2}$$

DADA UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA, HALLAR EL ÁNGULO

Normalmente buscamos la relación trigonométrica teniendo como dato el ángulo, pero en ocasiones es necesaria la operación inversa, es decir que, dada la relación trigonométrica, hallemos el ángulo del que se trata para ella. A esto le llamamos obtener las funciones trigonométricas inversas y en la mayoría de los textos lo veremos expresado anteponiendo el prefijo a la función en cuestión o la función elevada a la -1, lo que denota la operación inversa. En las calculadoras equivale a usar la inversa de la función y es como preguntar "¿Cuál es el ángulo para el valor de la función que tenemos?"

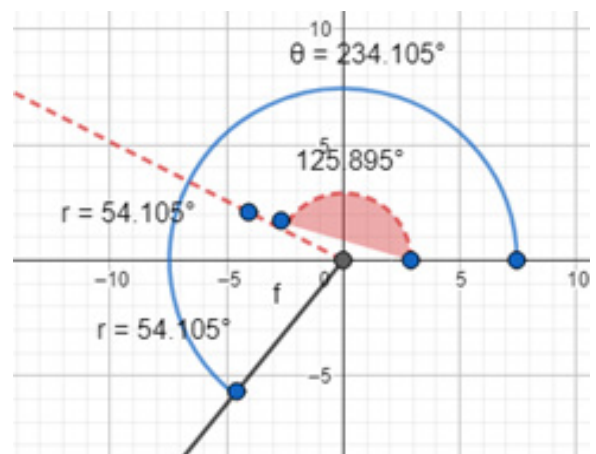
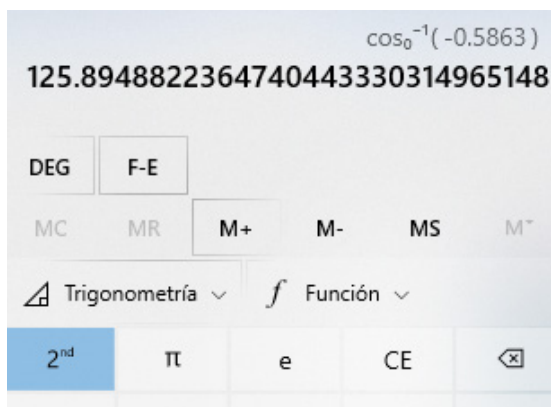
Ejemplo 1. Hallar el ángulo si:

$$\text{Sen } \theta = \frac{3}{7}; \theta = \text{ArcSen}\left(\frac{3}{7}\right) = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) = 25.3769^\circ$$



Si $\text{Cos } \theta = -0.5863$ y θ está en el C III

Nota: Si se obtiene el valor del ángulo de la calculadora, esta dará por defecto como resultado un ángulo en el segundo cuadrante, así que nos corresponde a nosotros encontrar el relacionado y trasladando al C II, sumar a 180° para dar la respuesta correcta.



$$\text{Arc Cos}(-0.5863) = \text{Cos}^{-1}(-0.5863) = 125.895^\circ$$

El ángulo relacionado es:

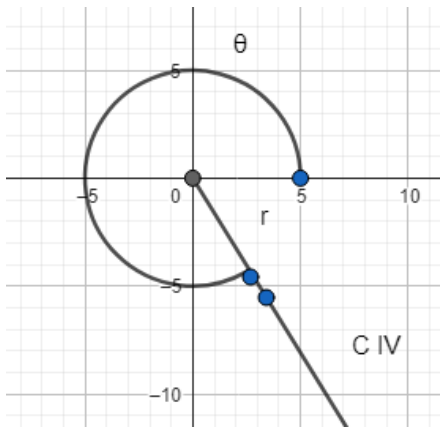
$$r = 180^\circ - 125.895^\circ = 54.105^\circ$$

El ángulo θ en C III es:

$$\theta = 180^\circ + 54.105^\circ; \hat{\theta} = 234.105^\circ$$

Ejemplo 2. Hallar el ángulo en el CIV para el cual el valor exacto de la función es:

$$\text{Csc } \theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$



Sin usar calculadora, el valor de la función corresponde a la Csc de un ángulo de 60° en C III o en C IV.

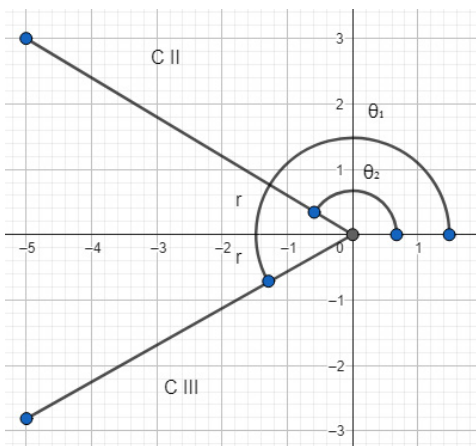
$$\text{Arc Csc} \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) = \text{Sen}^{-1} \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) = -60^\circ$$

Como es en el C IV, ese ángulo negativo se puede sustituir por otro medido en el sentido positivo y así expresar la solución evitando ambigüedades:

$$\theta = 360^\circ - 60^\circ; \hat{\theta} = 300^\circ$$

Ejemplo 3:

Si $\text{Sec } \theta = -\frac{6}{5}$, hallar todos los ángulos posibles que tengan esta relación trigonométrica.



En la calculadora no tenemos Secante por lo que para hallar el ángulo usaremos su función recíproca, que es Coseno.

$$\text{Cos } \theta = -\frac{5}{6} = -0.8333\dots; \theta = \text{ArcCos}(-0.8333\dots)$$

$$\hat{\theta}_1 = 146.44^\circ \text{ en CII}$$

El relacionado es: $r = 180 - 146.44^\circ; r = 33.56^\circ$

La solución de CIII es $\theta_2 = 180^\circ + 33.56$

$$\hat{\theta}_2 = 213.56^\circ \text{ en CIII}$$

Ejercicios:

1. Dado que $\text{Sen } \theta = -\frac{4}{5}$ y $\text{Cos } \theta = \frac{3}{5}$, encuentre los valores de las demás funciones del ángulo.

Sin usar calculadora obtenga el valor exacto de las siguientes expresiones:

2. $3\text{Sen}^2 \frac{\pi}{6} + 3\text{Cos}^2 \frac{\pi}{3} =$

3. $2 + 4\text{Sen} \frac{3\pi}{4} =$

Usando calculadora obtenga el valor de las siguientes funciones:

4. $\text{Cos } 8^\circ 35' =$

5. $\text{Sec } 0.23 \text{ rad} =$

6. $\text{Cot} \frac{\pi}{7} =$

Sin usar calculadora, obtenga los valores de *Seno*, *Coseno* y *tangente* de los ángulos:

7. $\theta = \frac{2}{3}\pi$

8. $\theta = 210^\circ$

9. $\theta = -\frac{9}{4}\pi$

Obtenga todos los ángulos en el intervalo de $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ que satisfagan:

10. $\text{Tan } \theta = \sqrt{3}$

11. $\text{Csc } \theta = -1$

12. $\text{Sec } \theta = -\sqrt{2}$

13. $\text{Cot } \theta = 2.1524$

SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo significa conocer todos sus lados y todos sus ángulos. En un triángulo rectángulo es conocido el ángulo recto, de tal forma que solo se necesita un par de datos más para poder encontrar todos los demás. Según el par de datos proporcionado, podríamos tener los tipos de problema que se pueden presentar en este tema.

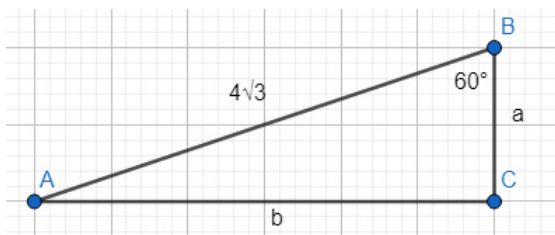
Por costumbre, a los ángulos se le nombra con letras mayúsculas y generalmente a los lados opuestos a cada uno de ellos se le nombra con la misma letra, pero minúscula.

PROBLEMAS EN LOS QUE SE CONOCE UN LADO Y UN ÁNGULO

En este caso, lo primero que se hace es encontrar el ángulo restante, sabiendo que es complementario al ángulo dado. Posteriormente se van determinando los lados que faltan usando funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente regularmente porque todas las calculadoras las tienen) que contengan el lado conocido y el que queremos conocer, para despejarlo y hallar su valor. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Conociendo un ángulo y la hipotenusa.

Resolver los siguientes triángulos rectángulos:



Conocemos la hipotenusa y el ángulo B .

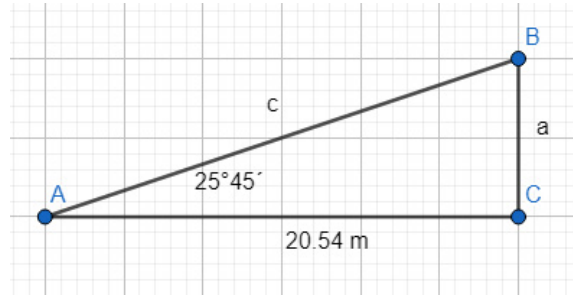
Primero hallaremos A , luego con la función Coseno hallaremos a y finalmente con Seno hallaremos el lado b . (También podemos usar el Teorema de Pitágoras para hallar el último lado).

$$A + B = 90^\circ; A = 90^\circ - B = 90^\circ - 60^\circ; A = 60^\circ$$

$$\cos B = \frac{a}{c}; \cos 60^\circ = \frac{a}{4\sqrt{3}}; a = 4\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \right); a = 2\sqrt{3} \approx 3.46$$

$$\sin B = \frac{b}{c}; \sin 60^\circ = \frac{b}{4\sqrt{3}}; b = 4\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right); b = 6$$

Ejemplo 2: Conociendo un ángulo y un cateto.



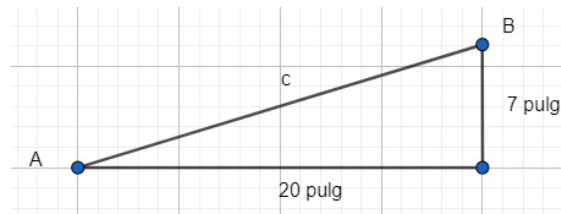
$$B = 90^\circ - 25^\circ 45'; B = 64.25^\circ = 64^\circ 15'$$

$$\tan 25^\circ 45' = \frac{a}{20.54}; a = 20.54 \tan 25^\circ 45' = 20.54(0.4823); a = 9.91 \text{ m}$$

$$\cos 25^\circ 45' = \frac{20.54}{c}; c = \frac{20.54}{0.9007}; c = 22.80 \text{ m}$$

Comprobando por Pitágoras la solución: $(22.80)^2 = (20.54)^2 + (9.91)^2$; $520.05 \approx 520.09$

Ejemplo 3. Conociendo dos lados (catetos)

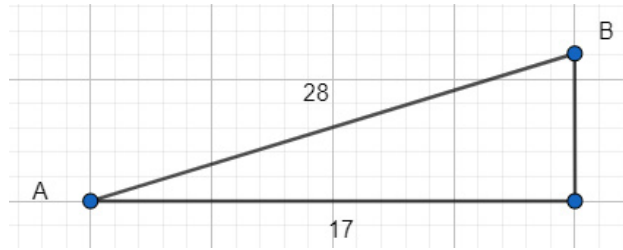


Calcular el lado que falta por el teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{20^2 + 7^2}$; $c \approx 21.19 \text{ pulg}$

Calcular los ángulos por medio de una función trigonométrica del ángulo que queremos conocer que involucre los lados que son datos originales.

$$\tan A = \frac{7}{20} = 0.35; A = \text{ArcTan}(0.35); A = 19.29^\circ = 19^\circ 17' 24.2''$$

$$\tan B = \frac{20}{7} = 2.8571; A = \text{ArcTan}(2.8571); A = 70.71^\circ = 70^\circ 42' 35.8''$$

Ejemplo 4: Conociendo dos lados (Un cateto y la hipotenusa)

Hallar el cateto que falta por el teorema de Pitágoras: $a = \sqrt{28^2 - 17^2}$; $a \approx 32.76$

$$\cos A = \frac{17}{28} = 0.6071 ; A = \text{Arc Cos}(0.6071) ; A = 52.62^\circ = 52^\circ.37'$$

$$\text{Sen } B = \frac{17}{28} = 0.6071 ; B = \text{Arc Sen}(0.6071) ; B = 37.38^\circ = 37^\circ 23'$$

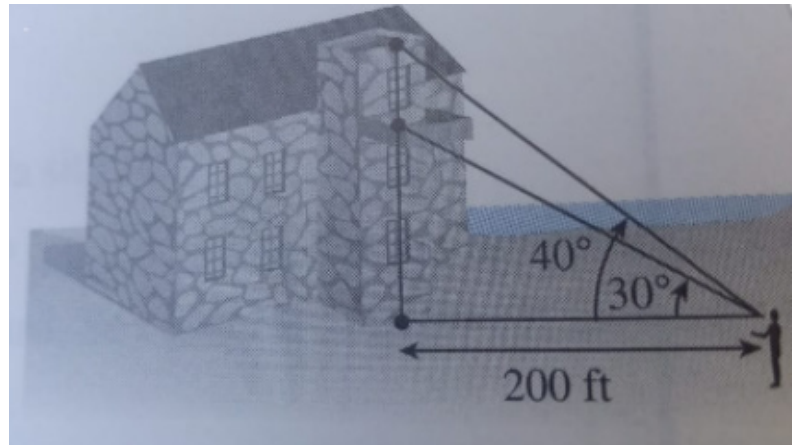
Para comprobar se puede verificar que A y B son complementarios: $52^\circ 37' + 37^\circ 23' = 90^\circ$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Ejemplo1:

El ángulo de elevación de un observador al extremo inferior de una plataforma de observación, localizada a 200 ft del observador, es de 30° . El ángulo de elevación a la parte superior es de 40° . ¿Cuál es la altura de la plataforma?

Créditos de autor: Matemáticas Universitarias Introdutorias Demana, Waits, Foley, Kennedy&Blitzer



h_1 es la altura a la parte inferior de la plataforma

h_2 es la altura a la parte superior de la plataforma

Usando la función tangente podremos construir ecuaciones para determinar de las alturas:

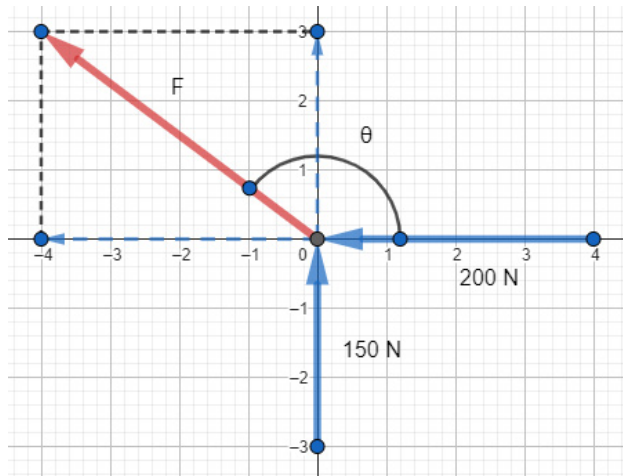
$$\tan 30^\circ = \frac{h_1}{200} ; h_1 = 200(0.5774) ; h_1 = 115.47 \text{ ft}$$

$$\tan 40^\circ = \frac{h_2}{200} ; h_2 = 200(0.8391) ; h_2 = 167.82 \text{ ft}$$

La altura de la plataforma se puede obtener con la diferencia entre la altura superior y la inferior:

$$h = h_2 - h_1 = 167.82 - 115.47; h = 52.35 \text{ ft}$$

Ejemplo 2. Una caja es empujada por dos personas. Un de ellas aplica una fuerza de 150 N dirigida hacia el norte y la otra con una fuerza de 200 N dirigida hacia el oeste. Estime el valor y la dirección de la fuerza resultante de ambos empujes.



En el diagrama trazado se observa cómo las fuerzas, al trasladarse sobre su dirección hasta que coincida su punto de aplicación con el origen, podrían ser las coordenadas rectangulares del extremo del vector resultante.

Geoméricamente el problema es similar a un ejemplo en el que hay que hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo y un ángulo agudo del mismo.

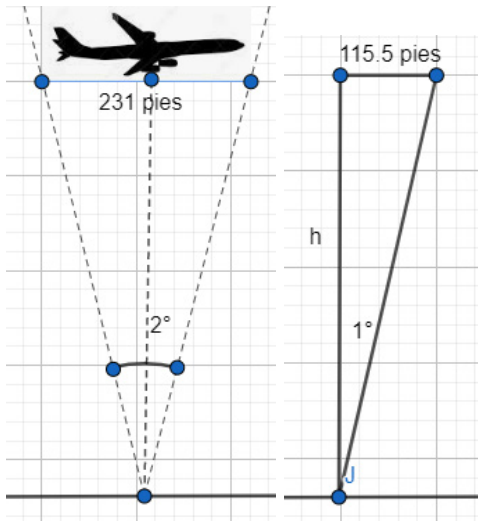
$$F = \sqrt{(-200)^2 + (150)^2}; F = 250 \text{ N}$$

$$\tan A = \frac{150}{-200} = -0.75; A = \tan^{-1}(-0.75); A = -36.87^\circ$$

Expresando el ángulo desde su posición normal: $\theta = 180^\circ - 36.87^\circ; \theta = 143.13^\circ$

Ejemplos adaptados de: Álgebra, trigonometría y geometría analítica 3ra Edición. Zill & Dewar, Mc Graw Hill.

Ejemplo 3. La longitud de un Boeing 747 es de 231 pies. ¿Cuál es la altura del avión, si abarca un ángulo de 2° en la visión de un observador a nivel del suelo?

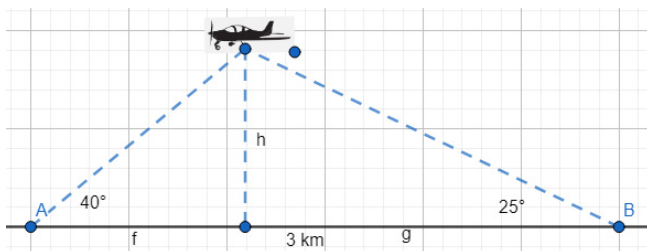


$$\tan 1^\circ = \frac{115.5}{h}$$

$$h = \frac{115.5}{\tan 1^\circ} = \frac{115.5}{0.0175}$$

$$h = 6,617 \text{ pies}$$

Ejemplo 4. Dos personas que están separadas 3 km entre sí en un terreno horizontal observan un aeroplano en el cielo. La primera persona lo ve con un ángulo de elevación de 40° y la segunda con uno de 25° . ¿A qué altura se encuentra el aeroplano en ese momento?



$$\tan 40^\circ = \frac{h}{f}; h = f * \tan 40^\circ$$

$$\tan 25^\circ = \frac{h}{g}; h = g * \tan 25^\circ$$

$$f \tan 40^\circ \cong g \tan 25^\circ$$

$$f = \frac{g \tan 25^\circ}{\tan 40^\circ}; f = 0.5557g$$

$$f + g = 3 \text{ km}; 0.5557g + g = 3 \text{ km}; 1.5557g = 3 \text{ km}; g = \frac{3}{1.5557} \text{ km}; g = 1.93 \text{ km}$$

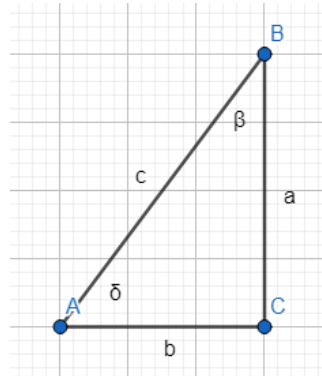
$$f = 0.5557(1.93) \text{ km}; f = 1.07 \text{ km}$$

$$h = f \tan 40^\circ = 1.07(0.8391); h = 0.9 \text{ km}$$

Ejercicios diversos:

Tomando como base el triángulo de la figura, resolver los siguientes triángulos de acuerdo a los datos proporcionados:

1. $a = 5, \beta = 29^\circ$
2. $b = 8, \beta = 35.3^\circ$
3. $b = 2, c = 3$
4. $a = 6, b = 12$
5. $a = 6, c = 18$



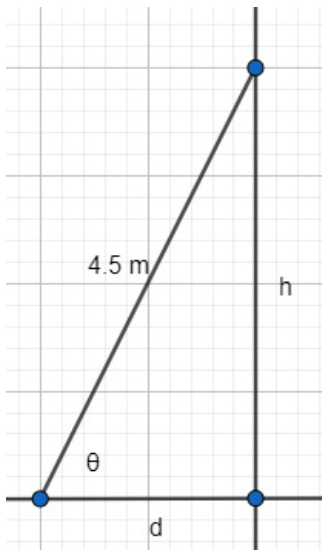
PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Una estructura vertical proyecta una sombra de 20 m sobre el suelo horizontal. Estime la altura de la estructura si el ángulo de elevación desde el final de la sombra hasta la cúspide de la estructura es de 65° .
2. Un fotógrafo se encuentra en el suelo y dirige su cámara en un ángulo de elevación de 38° para avistar un ave que se encuentra en la punta de un árbol de 15 m de altura. Estime la distancia entre la ubicación de la cámara y la base del árbol.
3. Calcule la altura del remate de la techumbre de la casa de la figura con los datos que se muestran. Suponga el suelo horizontal.



Imagen tomada de freepick.com libre de derechos de autor.

4. Una norma recomienda recargar una escalera de 4.2 m en un ángulo de que varía entre 35° y 75° . Estime las distancias a las que debería colocarse el apoyo para cumplir con esta norma y las alturas a las que se recargaría contra una pared vertical, en cada caso.



5. Un puente levadizo de 40 m de longitud se levanta hasta quedar a una altura de 40 m sobre la superficie del agua. Cuando el puente está abajo queda un espacio de 5.5 m libre entre la superficie del agua y la estructura. Estime el ángulo de elevación máximo del puente.

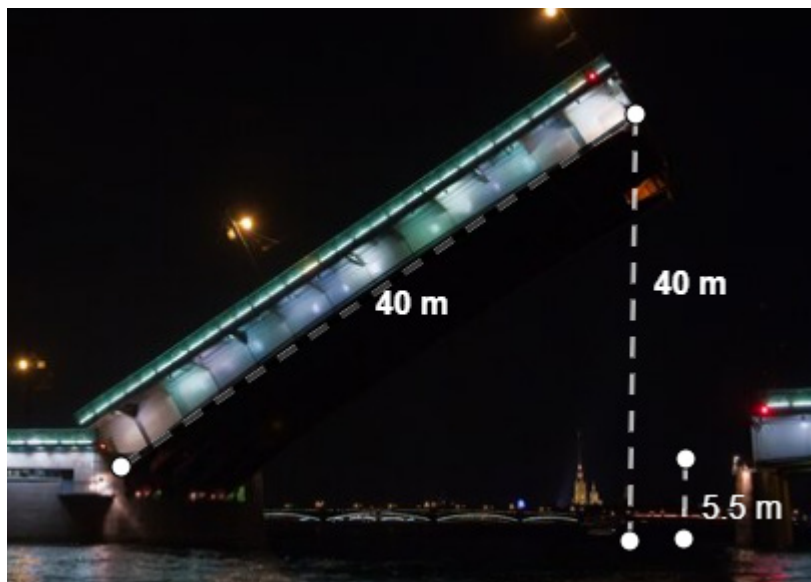
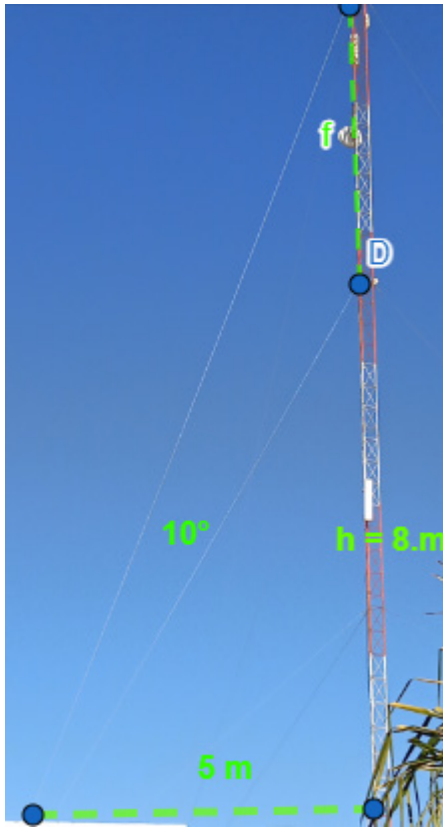


Imagen tomada de freepick.com libre de derechos de autor.

6. Dos cables de retenida se anclan a una distancia de 5 m de la base de la antena y forman entre sí un ángulo de 10° . Estime la distancia entre los amarres de los cables a la antena, si el primero está a 8 m de altura sobre la base de la misma.

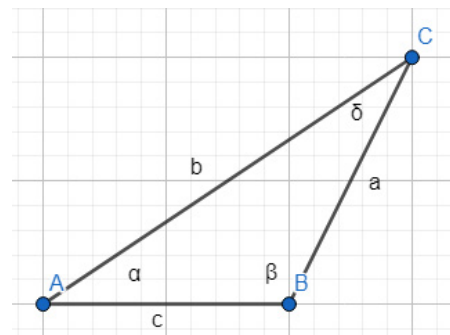


RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

En el tema anterior vimos criterios de solución que aplican para triángulos rectángulos exclusivamente. En este tema, los criterios que se van a revisar son útiles para solucionar triángulos en general, sean oblicuángulos o rectángulos.

En general, para resolver un triángulo se necesitan tres datos:

- Dos ángulos y un lado
- Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos
- Dos lados y el ángulo formado por ellos
- Tres lados



LEY DE LOS SENOS

Si conocemos dos ángulos y un lado o dos ángulos y un lado opuesto a uno de ellos, la Ley de los Senos puede ser útil para resolver el triángulo. Esta ley dice **"En todo triángulo, las relaciones entre un lado y el seno de su ángulo opuesto son iguales y constantes"**.

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C} \text{ o bien } \frac{\text{Sen } A}{a} = \frac{\text{Sen } B}{b} = \frac{\text{Sen } C}{c}$$

Ejemplos. Hallar todos los ángulos y todos los lados del triángulo de la figura:

Caso a) Dos ángulos y un lado.

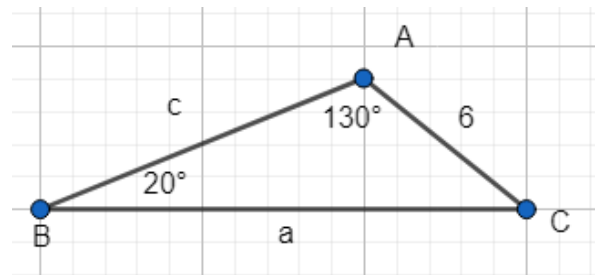
$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 150^\circ ; C = 30^\circ$$

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} ; \frac{a}{\text{Sen } 130^\circ} = \frac{6}{\text{Sen } 20^\circ}$$

$$a = \frac{6 \text{ Sen } 130^\circ}{\text{Sen } 20^\circ} ; a = 13.44$$

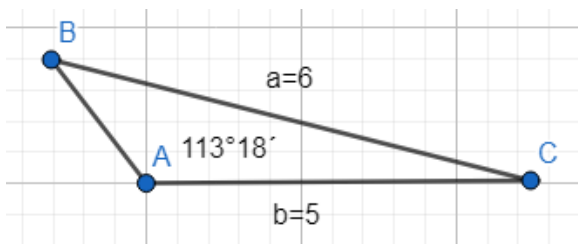
$$\frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C} ; \frac{6}{\text{Sen } 20^\circ} = \frac{c}{\text{Sen } 30^\circ}$$

$$c = \frac{6 \text{ Sen } 30^\circ}{\text{Sen } 20^\circ} ; c = 8.77$$



Caso b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Resolver el triángulo oblicuángulo que tiene $A = 113^\circ 18'$, $a = 6$, $b = 5$



$$\frac{\text{Sen } B}{b} = \frac{\text{Sen } A}{a} ; \text{Sen } B = \frac{b \text{ Sen } A}{a} = \frac{5 \text{ Sen } 113^\circ 18'}{6} ; \text{Sen } B = 0.7654 ; B = \text{ArcSen}(0.7654)$$

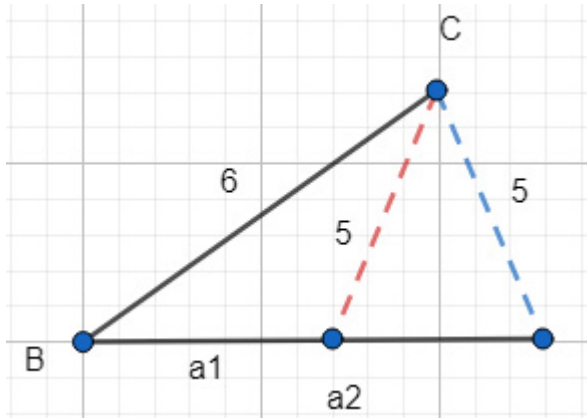
$$B = 49.94^\circ$$

$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (113.3 + 49.94) ; C = 16.76^\circ$$

$$\frac{c}{\text{Sen } C} = \frac{a}{\text{Sen } A} ; c = \frac{a \text{ Sen } C}{\text{Sen } A} = \frac{6 \text{ Sen } 16.76^\circ}{\text{Sen } 113.3^\circ} ; c = 1.89$$

Ejemplo 3. Resolver el triángulo oblicuángulo que tiene $B = 50^\circ, b = 6, c = 5$

Nota: En este caso, al tener como dato un ángulo agudo (menor que 90°) y dado que la función seno tiene signo positivo tanto en el primer cuadrante como en el segundo, este problema puede tener dos soluciones. En la resolución se agregarán comentarios para abundar en las razones de esta posible ambigüedad.



$$\frac{\text{Sen } C}{c} = \frac{\text{Sen } B}{b}; \text{Sen } C = \frac{6 \text{ Sen } 50^\circ}{5}$$

$$\text{Sen } C = 0.9193; C = \text{ArcSen}(0.9193)$$

$$C_1 = 66.82^\circ$$

Como Seno es positivo en CI y en CII, puede haber un ángulo obtuso con el mismo valor de la función, por eso $C_2 = 180 - 66.82^\circ$

$$C_2 = 113.18^\circ$$

Para el ángulo C_1 tenemos:

$$A_1 = 180^\circ - (50^\circ + 66.82^\circ) = 180^\circ - 116.82^\circ; A_1 = 63.18^\circ$$

$$\frac{a_1}{\text{Sen } A_1} = \frac{b}{\text{Sen } B}; a_1 = \frac{5 \text{ Sen } 63.18^\circ}{\text{Sen } 50^\circ}; a_1 = 5.82$$

Para el ángulo C_2 tenemos:

$$A_2 = 180^\circ - (50^\circ + 113.18^\circ) = 180^\circ - 163.18^\circ; A_2 = 16.82^\circ$$

$$\frac{a_2}{\text{Sen } A_2} = \frac{b}{\text{Sen } B}; a_2 = \frac{5 \text{ Sen } 16.82^\circ}{\text{Sen } 50^\circ}; a_2 = 1.89$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. En las aceras opuestas de una avenida se encuentran dos puntos, A y B. Un tercer punto C se encuentra en la misma acera que B y a 23 m de él. Si el ángulo que forman los puntos ABC es de 100° y el ángulo ACB es de 22° , calcule la distancia de A a B a través de la avenida.

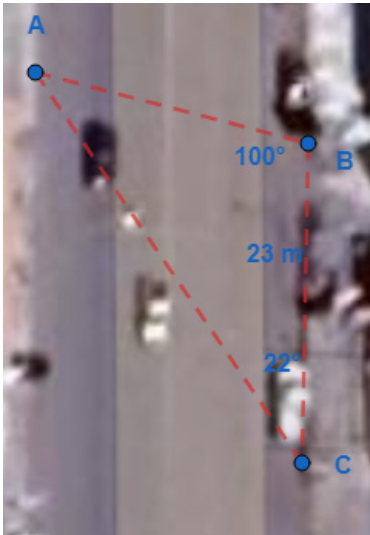


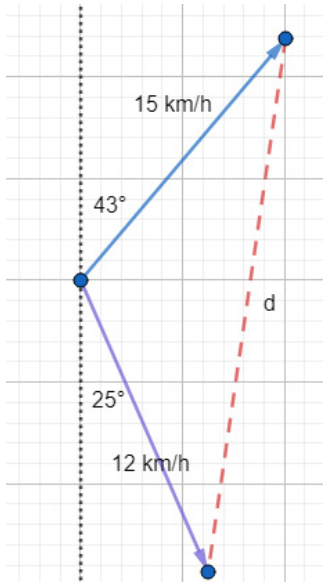
Imagen tomada de Google Earth.

2. En una calle recta que tiene pendiente en forma de cuneta, un topógrafo ha estimado una distancia horizontal de 34 m entre dos puntos A y B. Para llegar desde A hasta un punto C sobre la calle y alineado con A y con B, el topógrafo camina 19 m. Si el ángulo que forman los puntos ACB es de 155° , estime la distancia que debe recorrer desde C para llegar a B.



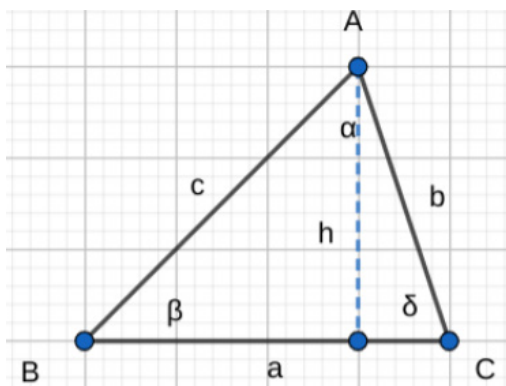
Fracción de imagen tomada de <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRxo5nLVqM2hHmkW0pHZs2qJhNzqnmZeBlzg&usqp=CAU>

3. Dos ciclistas salen de un punto, uno con una rapidez de 15 km/h y el otro con 12 km/h. Si el más rápido mantiene un rumbo de N 43° E y el otro lleva un rumbo de S 25° E, ¿Cuál es la separación entre ambos cuatro horas después de que salieron?



Revise si es posible construir un triángulo con lados de 6, 10 y 14 m de longitud. Si lo es, ¿Cuáles son ángulos interiores?

LEY DE LOS COSENOS



En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de ambos lados por el coseno del ángulo que forma dichos lados.

Nota: Esta ley aplica para triángulo en general, sean o no oblicuángulos.

De acuerdo con el texto de la ley, podemos tener tres formas de representarla, una para cada lado.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Si analizamos las fórmulas, estas son útiles para resolver triángulos si conocemos dos lados y el ángulo que forman ambos.

Para el caso de que tengamos los tres lados y se necesite calcular los ángulos, la sugerencia es despejar de las formas anteriores para obtener el ángulo opuesto al lado más grande entre los datos ya que, de esta forma, la función *coseno* se hace cargo de distinguir entre un ángulo agudo o un ángulo obtuso y evitamos caer en el posible caso de ambigüedad que se mencionó en el tema de la ley de los senos.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ejemplo 1:

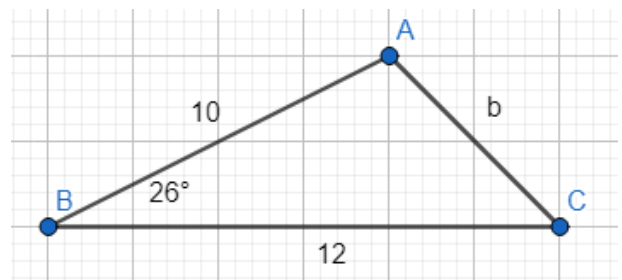
Resolver el triángulo de datos:

$$B = 26^\circ, a = 12, c = 10$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$b^2 = (12)^2 + (10)^2 - 2(12)(10) \cos 26^\circ$$

$$b^2 = 28.29; b = 5.32$$



Al calcular el lado "b", ya conocemos un ángulo y lado opuestos, así que podemos seguir resolviendo mediante la *ley de los senos*.

$$\frac{\text{Sen } C}{c} = \frac{\text{Sen } B}{b}; \text{Sen } C = \frac{c \text{ Sen } B}{b} = \frac{10 \text{ Sen } 26^\circ}{5.32} = 0.824; C = \text{ArcSen } 0.824; C = 55.49^\circ$$

Finalmente, como la suma de los ángulos internos es 180° , podemos calcular el ángulo que falta por diferencia:

$$A = 180^\circ - (26^\circ + 55.49^\circ); A = 98.51^\circ$$

Ejemplo 2:

Hallar los ángulos del triángulo de lados $a = 7$, $b = 6$, $c = 9$

Como se sugirió, trataremos de encontrar primero el ángulo opuesto al lado más grande.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{Cos } C$$

$$c^2 + 2ab \text{Cos } C = a^2 + b^2; 2ab \text{Cos } C = a^2 + b^2 - c^2; \text{Cos } C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\text{Cos } C = \frac{(7)^2 + (6)^2 - (9)^2}{2(7)(6)} = \frac{49 + 36 - 81}{84} = 0.0476; C = \text{ArcCos } 0.0476; C = 87.27^\circ$$

Ya tenemos por lo menos un lado y ángulo que son opuestos, ahora usamos la *ley de los senos*.

$$\frac{\text{Sen } A}{a} = \frac{\text{Sen } C}{c}; \text{Sen } A = \frac{a \text{ Sen } C}{c} = \frac{7 \text{ Sen } 87.27^\circ}{9} = 0.7769; A = \text{ArcSen } 0.7769; A = 50.98^\circ$$

$$B = 180^\circ - (50.98^\circ + 87.27^\circ); B = 41.75^\circ$$

Como conclusión, la *ley de los cosenos* se puede utilizar en triángulos rectángulos o no rectángulos cuando se conocen dos lados y el ángulo formado por ellos o cuando se conocen los tres lados. Una vez que se encuentra un par ángulo-lado que sean opuestos, generalmente se opta con usar la *ley de los senos* porque tiene una ecuación con operaciones más simples y una estructura más fácil de manipular.

Es importante recordar que cada vez que se utiliza un dato recién obtenido, si cometimos un error al calcularlo, arrastraremos el error a los datos subsecuentes. Por esta razón se sugiere hacerlo con cuidado y revisar el proceso al terminar.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Al definir las funciones trigonométricas nos pudimos dar cuenta de algunas relaciones que hay entre ellas. Por ejemplo, algunas son el recíproco de las otras:

Relaciones recíprocas o inversas

$$\text{Csc } \theta = \frac{1}{\text{Sen } \theta}$$

$$\text{Sec } \theta = \frac{1}{\text{Cos } \theta}$$

$$\text{Cot } \theta = \frac{1}{\text{Tan } \theta}$$

O bien, $\text{Sen } \theta \text{ Csc } \theta = 1$

O bien, $\text{Cos } \theta \text{ Sec } \theta = 1$

O bien, $\text{Tan } \theta \text{ Cot } \theta = 1$

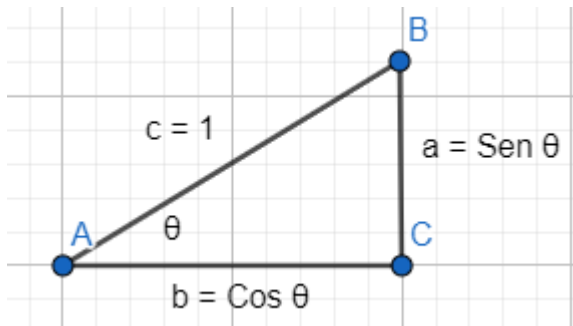
RELACIONES POR COCIENTE O DIVISIÓN

Si tenemos un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa "c" sea unitaria, podemos expresar los catetos "a" y "b" en función de coseno y seno del ángulo "θ".

$$\text{Sen } \theta = \frac{a}{c}; a = c \text{ Sen } \theta, \text{ si } c = 1, \text{ entonces } a = \text{Sen } \theta$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{b}{c}; b = c \text{ Cos } \theta, \text{ si } c = 1, \text{ entonces } b = \text{Cos } \theta$$

Luego obtenemos la función tangente y cotangente de "θ" y quedarían las relaciones siguientes:



$$\text{Tan } \theta = \frac{a}{b}; \text{Tan } \theta = \frac{\text{Sen } \theta}{\text{Cos } \theta}$$

$$\text{Cot } \theta = \frac{b}{a}; \text{Cot } \theta = \frac{\text{Cos } \theta}{\text{Sen } \theta}$$

Ambas identidades permiten expresar tangente y cotangente en términos de seno y coseno, lo cual es conveniente en algunos casos como lo veremos más adelante.

RELACIONES PITAGÓRICAS

Tomando como base el mismo triángulo rectángulo de la figura anterior, el teorema de Pitágoras se debería cumplir, es decir $c^2 = a^2 + b^2$.

Si $c = 1, a = \text{Sen } \theta$ y $b = \text{Cos } \theta$, sustituyendo en el teorema de Pitágoras tendríamos:

$$1^2 = \text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta; \text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$$

Esta expresión puede escribirse de otras formas, despejando términos:

$$\text{Sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta$$

$$\text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sen}^2\theta$$

Si tomamos la primera forma de la identidad anterior y dividimos ambos miembros por $\text{Cos}^2\theta$ queda:

$$\frac{\text{Sen}^2\theta}{\text{Cos}^2\theta} + \frac{\text{Cos}^2\theta}{\text{Cos}^2\theta} = \frac{1}{\text{Cos}^2\theta}$$

Reduciendo y recordando las relaciones recíprocas y las relaciones por cociente ya obtenidas:

$$\left(\frac{\text{Sen } \theta}{\text{Cos } \theta}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\text{Cos } \theta}\right)^2; \text{Tan}^2\theta + 1 = \text{Sec}^2\theta$$

Análogamente, si en lugar de dividir entre $\text{Cos}^2\theta$ dividimos entre $\text{Sen}^2\theta$ queda:

$$\frac{\text{Sen}^2\theta}{\text{Sen}^2\theta} + \frac{\text{Cos}^2\theta}{\text{Sen}^2\theta} = \frac{1}{\text{Sen}^2\theta}$$

$$1 + \left(\frac{\text{Cos } \theta}{\text{Sen } \theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\text{Sen } \theta}\right)^2; 1 + \text{Cot}^2\theta = \text{Csc}^2\theta$$

En resumen, las formas más conocidas de las identidades fundamentales son:

Identidades trigonométricas fundamentales		
Relaciones recíprocas o inversas		
$Csc \theta = \frac{1}{Sen \theta}$	$Sec \theta = \frac{1}{Cos \theta}$	$Cot \theta = \frac{1}{Tan \theta}$
Relaciones por cociente o división		
$Tan \theta = \frac{Sen \theta}{Cos \theta}$		$Cot \theta = \frac{Cos \theta}{Sen \theta}$
Relaciones pitagóricas		
$Sen^2 \theta + Cos^2 \theta = 1$	$Tan^2 \theta + 1 = Sec^2 \theta$	$1 + Cot^2 \theta = Csc^2 \theta$

Un posible uso de las identidades trigonométricas es el de poder encontrar el valor de una función a partir de otra.

Ejemplo 1: si se sabe que $Sen \theta = \sqrt{2}$, hallar $Csc \theta$.

Se sabe que ambas funciones son recíprocas, así que la solución es:

$$Csc \theta = \frac{1}{Sen \theta}; Csc \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 2:

Si $Sec \theta = \frac{3}{2}$, hallar el valor de $Tan \theta$.

Al no definirnos la posición exacta de θ , hay que considerar que secante es positiva en el cuadrante I y en el IV, así que el problema puede tener dos soluciones.

$$1 + Tan^2 \theta = Sec^2 \theta; Tan \theta = \sqrt{Sec^2 \theta - 1} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \sqrt{\frac{5}{4}}; Tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ en C I}$$

$$Tan \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ en C IV}$$

Otro propósito de las identidades trigonométricas es el de poder hacer transformaciones entre unas funciones para que se adapten a los datos que nos han proporcionado o el de verificar si una proposición es verdadera o válida o no lo es.

No existe un procedimiento universal para hacer esto, pero hay criterios que pueden ser útiles para conseguir el propósito de demostrar que una identidad es verdadera. Algunos de estos criterios son:

- Es común que trabajemos con un solo lado de la identidad para tratar de transformarlo hasta que sea semejante al otro.
- En muchas ocasiones se selecciona el lado más complejo para trabajar porque es más conveniente simplificar lo complejo que complejizar lo simple.
- Si hay operaciones matemáticas indicadas (como un producto o una potencia de un polinomio) se ejecutan y posteriormente se hacen las transformaciones trigonométricas.
- Las funciones se aparejan por medio de las identidades fundamentales, así *seno* y *coseno* se aparejan, como *tangente* y *secante* y *cotangente* y *cosecante*. Cuando haya más de dos funciones y no podamos conseguir exclusivamente estas parejas, es recomendable pasar todas las demás a *senos* y *cosenos*.
- La práctica ayuda a mejorar la intuición para definir la posible estrategia al tratar de verificar una identidad, por lo que es bueno practicar mucho, además de que estos problemas pueden llegar a ser divertidos, como desafíos.

Ejercicios tomados de: Matemáticas Universitarias Introdutorias. Demana, Waits, Foley, Kennedy & Blitzer.

Los primeros tres ejercicios tienen comentarios para ir abordando el tema paulatinamente, en los sucesivos solo se resaltarán los cambios con letra roja.

$$\mathbf{Sen^3 x + Sen x Cos^2 x = Sen x}$$

Ejemplo 1: El miembro de la izquierda se factoriza por factor común.

$$Sen x (\mathbf{Sen^2 x + Cos^2 x}) = Sen x$$

El factor en color rojo es una identidad fundamental pitagórica y equivale a 1.

$$\mathbf{Sen x = Sen x}$$

Ejemplo 2:
$$\frac{(\mathbf{Sec x + 1})(\mathbf{Sec x - 1})}{\mathbf{Sen^2 x}} = \mathbf{Sec^2 x}$$

El numerador en el miembro de la izquierda es un producto que se puede desarrollar.

$$\frac{\boxed{\text{Sec}^2 x - 1}}{\text{Sen}^2 x} = \text{Sec}^2 x$$

La expresión del numerador equivale a un despeje de la segunda identidad pitagórica y reemplazando queda $\text{Tan}^2 x$.

$$\frac{\boxed{\text{Tan}^2 x}}{\text{Sen}^2 x} = \text{Sec}^2 x$$

Cambiando el numerador a *senos* y *cosenos*, usando las relaciones por cociente y reduciendo.

$$\frac{\boxed{\text{Sen}^2 x}}{\frac{\boxed{\text{Cos}^2 x}}{\boxed{\text{Sen}^2 x}}} = 1$$

$$\frac{1}{\text{Cos}^2 x} = 1 ; \left(\frac{1}{\boxed{\text{Cos} x}} \right)^2 = 1$$

La función recíproca a $\text{Cos} x$ es $\text{Sec} x$.

$$\text{Sec} x = \text{Sec} x$$

Ejemplo 3:
$$\frac{\text{Cos} x}{1 - \text{Sen} x} - \frac{\text{Sen} x}{\text{Cos} x} = \text{Sec} x$$

El miembro de la izquierda tiene una suma de fracciones por efectuar.

$$\frac{\text{Cos}^2 x - \text{Sen} x(1 - \text{Sen} x)}{(1 - \text{Sen} x)(\text{Cos} x)} = \text{Sec} x ; \frac{\boxed{\text{Cos}^2 x} - \text{Sen} x \boxed{+ \text{Sen}^2 x}}{(1 - \text{Sen} x)(\text{Cos} x)} = \text{Sec}$$

Después de usar la primera identidad pitagórica queda una fracción que se puede reducir.

$$\frac{\boxed{1 - \text{Sen} x}}{\boxed{(1 - \text{Sen} x)}(\text{Cos} x)} = \text{Sec} x$$

Después de reducir queda una identidad recíproca que reemplazamos para concluir.

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{\text{Cos} x}} = \text{Sec} x ; \text{Sec} x = \text{Sec} x$$

Ejemplo 4:
$$\frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x} - \frac{\text{Sec } x}{\text{Sen } x} = -\text{Cot } x$$

$$\frac{\text{Sen}^2 x - \text{Cos } x \text{ Sec } x}{\text{Cos } x \text{ Sen } x} = -\text{Cot } x$$

$$\frac{\text{Sen}^2 x - 1}{\text{Cos } x \text{ Sen } x} = -\text{Cot } x$$

$$\frac{-\text{Cos}^2 x}{\text{Cos } x \text{ Sen } x} = -\text{Cot } x$$

$$-\frac{\text{Cos } x}{\text{Sen } x} = -\text{Cot } x$$

$$-\text{Cot } x = -\text{Cot } x$$

Ejemplo 5:

$$\text{Tan } x + \text{Cot } x = \text{Sec } x \text{ Csc } x$$

$$\frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x} + \frac{\text{Cos } x}{\text{Sen } x} = \text{Sec } x \text{ Csc } x$$

$$\frac{\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x}{\text{Cos } x \text{ Sen } x} = \text{Sec } x \text{ Csc } x$$

$$\frac{1}{\text{Cos } x \text{ Sen } x} = \text{Sec } x \text{ Csc } x$$

$$\frac{1}{\text{Cos } x} \cdot \frac{1}{\text{Sen } x} = \text{Sec } x \text{ Csc } x ; \text{Sec } x \text{ Csc } x = \text{Sec } x \text{ Csc } x$$

Ejemplo 6:

$$(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2 \tan x$$

$$(1 - \tan x)^2 = \tan^2 x + 1 - 2 \tan x$$

$$(1 - \tan x)^2 = 1 - 2 \tan x + \tan^2 x$$

$$(1 - \tan x)^2 = (1 - \tan x)^2$$

Ejemplo 7:

$$\frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1} = 2 \cot x \csc x$$

$$\frac{\sec x + 1 + \sec x - 1}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)} = 2 \cot x \csc x$$

$$\frac{2 \sec x}{\sec^2 x - 1} = 2 \cot x \csc x$$

$$\frac{2 \sec x}{\tan^2 x} = 2 \cot x \csc x$$

$$\frac{2 \cdot \left(\frac{1}{\cos x} \right)}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = 2 \cot x \csc x$$

$$\frac{2 \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = 2 \cot x \csc x$$

$$2 \cot x \csc x = 2 \cot x \csc x$$

Ejemplo 8:

$$\frac{1}{1 + \text{Sen } x} + \frac{1}{1 - \text{Sen } x} = 2 \text{Sec}^2 x$$

$$\frac{1 - \text{Sen } x + 1 + \text{Sen } x}{(1 + \text{Sen } x)(1 - \text{Sen } x)} = 2 \text{Sec}^2 x$$

$$\frac{2}{1 - \text{Sen}^2 x} = 2 \text{Sec}^2 x$$

$$2 \cdot \frac{1}{\text{Cos}^2 x} = 2 \text{Sec}^2 x$$

$$2 \text{Sec}^2 x = 2 \text{Sec}^2 x$$

Otra aplicación en Cálculo Integral es para reducir los radicandos que tienen formas de sumas o diferencias de cuadrados a expresiones trigonométricas cuadráticas de un solo término. Se van a utilizar en el método de integración llamado Integración por Sustitución trigonométrica.

Ejemplo 9: Transformar $\sqrt{a^2 - x^2}$ a una expresión trigonométrica reemplazando con $x = a \text{Sen} \theta$, si

$a > 0$ y $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, es decir en C III y C IV.

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \text{Sen} \theta)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \text{Sen}^2 \theta} = \sqrt{a^2 (1 - \text{Sen}^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \text{Cos}^2 \theta} = a \text{Cos } \theta$$

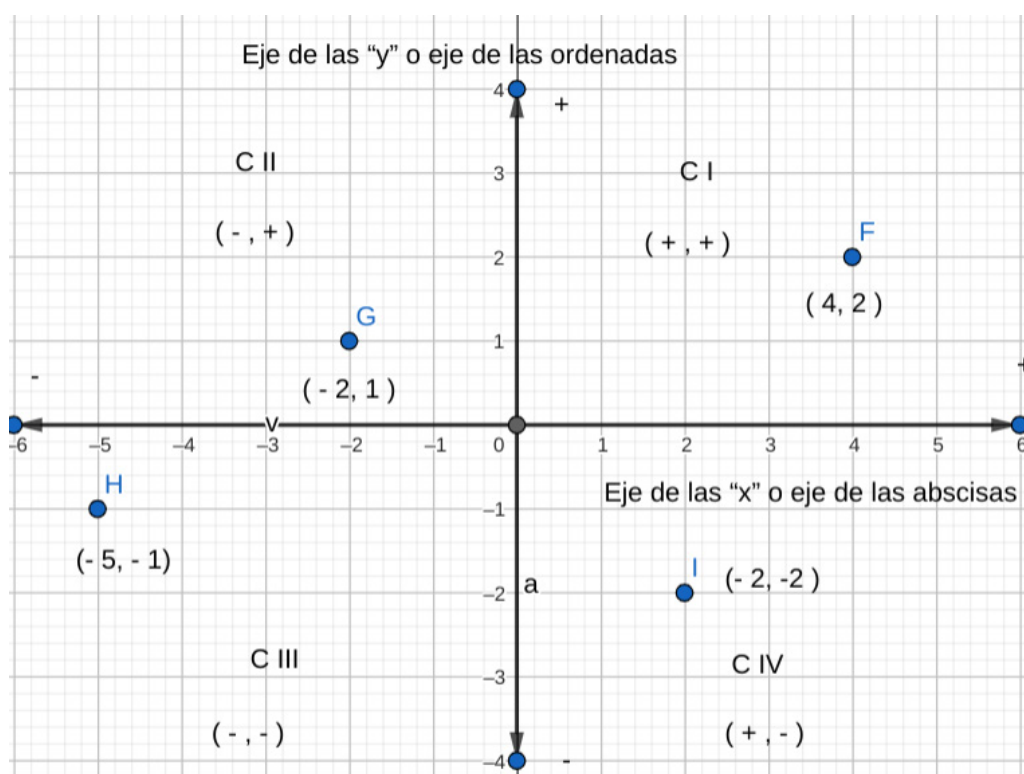
Nota: Esta técnica se utiliza para poder reducir una diferencia de cuadrados a un término cuadrático al que puede extraerse raíz sin problema. Es obvio que la primera expresión es algebraica y la última es trigonométrica. En caso de tener un radicando que sea una suma de cuadrados o bien una diferencia como la del ejemplo, pero con signos invertidos, se utilizan otras transformaciones trigonométricas pero la técnica es similar.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

La Geometría Analítica combina los conceptos de número o algebraicos, con los de forma de la geometría. Los trabajos que dieron inicio a este campo fueron de Descartes (1596-1650) y de Pierre de Fermat (1601-1655), quienes marcaron la pauta para que algunos problemas geométricos se resolvieran algebraicamente y a la inversa, algunos problemas de álgebra se resolvieran geoméricamente. También dotó a Newton y a Leibnitz de herramientas para desarrollar el cálculo.

EL PLANO CARTESIANO

Su nombre se debe al citado René Descartes y en dos dimensiones consiste en dos rectas perpendiculares que representan las direcciones horizontal y vertical, también llamados ejes de las abscisas o eje de las "x" y de las ordenadas o eje "y". El origen o punto de intersección entre ambos ejes, es la frontera entre el sentido positivo y el negativo de cada dirección; el criterio es que sea hacia la derecha y hacia arriba el positivo y hacia la izquierda y hacia abajo el negativo, para "x" y para "y" respectivamente.

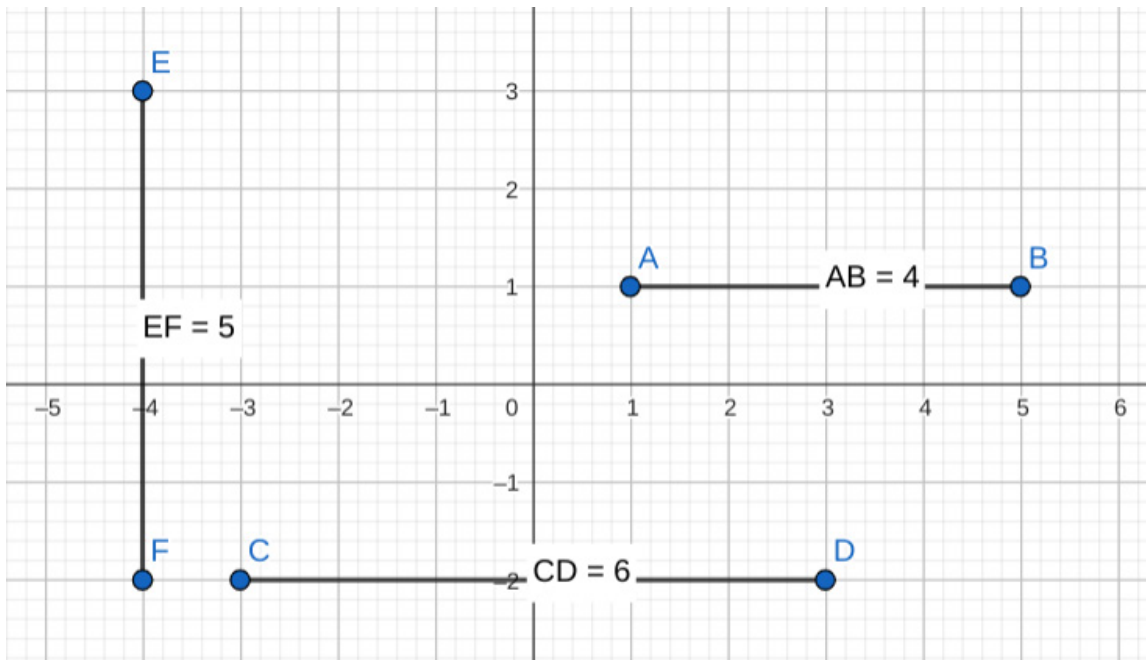


Los puntos o posiciones son una pareja de coordenadas (x,y) y los lugares geométricos se forman con todo el conjunto de puntos que satisfacen condiciones específicas y que matemáticamente tiene una ecuación determinada.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Una de las necesidades más básicas que podemos resolver en la Geometría Analítica es determinar cuál es la distancia entre un par de puntos cualquiera.

Si los puntos están alineados horizontalmente o verticalmente, esto es tan sencillo como contar las unidades entre ambos puntos o bien sumar los valores absolutos de las coordenadas horizontales o verticales, según sea el caso. Veamos unos ejemplos para ilustrar este caso.



En la gráfica se puede apreciar, por ejemplo, que $C(-3, -2)$ y $D(3, -2)$ tienen la misma altura u ordenada, por lo tanto para calcular la distancia basta con obtener el valor absoluto de la diferencia entre las abscisas de ambos sin importar el orden en el que se efectúe la diferencia:

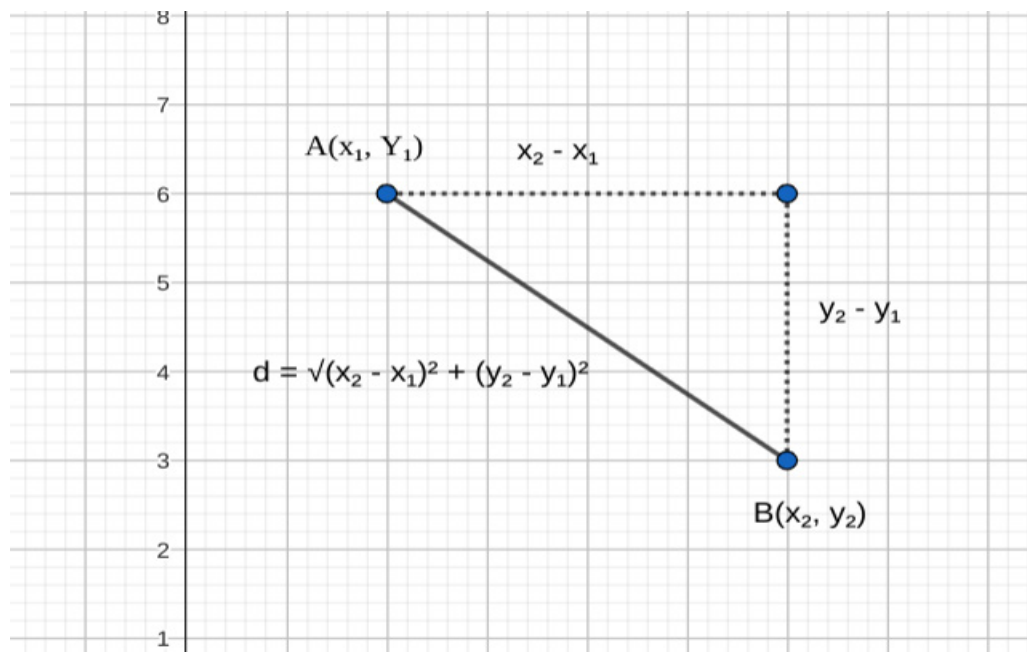
$$d = |x_2 - x_1| = |3 - (-3)| = |3 + 3|; d = 6 \text{ o bien } d = |-3 - 3| = |-6|; d = 6$$

Cuando los puntos no se alinean en forma horizontal ni vertical, la distancia se puede calcular de la misma forma en la que se calcula la hipotenusa de un triángulo si se conocen los catetos que son la diferencia entre las distancias y las alturas de los puntos.

Como se pudo ver antes, no es importante el orden para determinar cuál punto es el primero y cuál el segundo, ya que las distancias son valores los valores absolutos de las diferencias, además de que, por el teorema de Pitágoras, cada diferencia será elevada al cuadrado, por lo que la raíz cuadrada siempre será real.

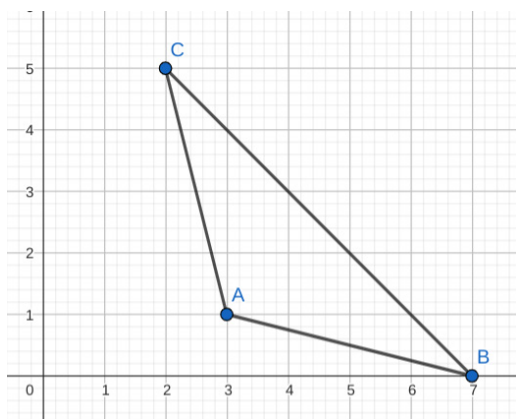
La fórmula para calcular la distancia entre un par de puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Ejemplo 1: Graficar y clasificar según sus lados y según sus ángulos los triángulos de vértices en:

$A(3,1), B(7,0)$ y $C(2,5)$



Calcular las longitudes de los lados y clasificar:

$$AB = \sqrt{(7-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{16+1}; \mathbf{AB} = \sqrt{17}$$

$$BC = \sqrt{(7-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{25+25}; \mathbf{BC} = 5\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{1+16}; \mathbf{AC} = \sqrt{17}$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \neq \mathbf{BC} \therefore \text{El triángulo es isósceles.}$$

Calcular las pendientes de los lados y los ángulos para clasificar:

Liga a fundamentos del tema de pendiente:

<https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:linear-equations-graphs/x2f8bb11595b61c86:slope/v/introduction-to-slope>

$$m_{AB} = \frac{0-1}{7-3}; m_{AB} = -\frac{1}{4} \quad m_{BC} = \frac{5-0}{2-7}; m_{BC} = -\frac{5}{5} = -1 \quad m_{AC} = \frac{5-1}{2-3}; m_{AC} = -\frac{4}{1} = -4$$

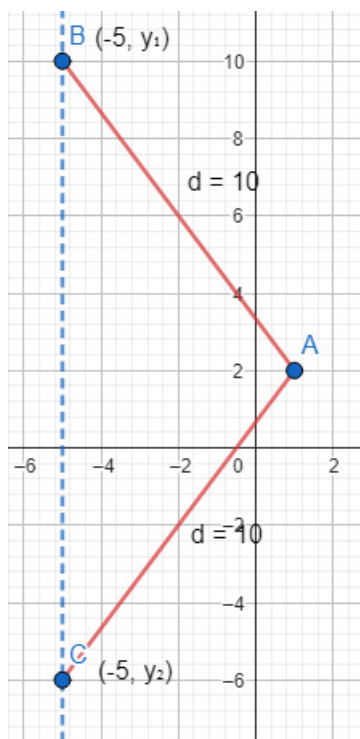
Calcular los ángulos:

$$\tan A = \frac{m_{BC} - m_{AB}}{1 + m_{BC} m_{AB}} = \frac{-1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + (-1)\left(-\frac{1}{4}\right)} = \left[\frac{-1 + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} \right] \cdot \frac{4}{4} = \frac{-4 + 1}{4 + 1} = -\frac{3}{5}; A = \text{ArcTan}(-0.6)$$

$A = -30.96^\circ$; $A = 180 - 30.96^\circ$; $A = 149.03^\circ$. \therefore **El triángulo es obtusángulo.**

Ejercicio 1: $A(1,2), B(3,4)$ y $C(-1,4)$

Ejemplo 2. Hallar la ordenada de un punto de abscisa $x = -5$ que dista 10 unidades de $A(1,2)$.



La distancia desde A hacia los puntos B y C es la misma e igual a 10.

$$AB = \sqrt{(-5-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{36 + y^2 - 4y + 4}$$

$$AB = \sqrt{y^2 - 4y + 40}$$

$$\sqrt{y^2 - 4y + 40} = 10$$

Elevando ambos miembros al cuadrado para reducir la raíz:

$$y^2 - 4y + 40 = 100 ; y^2 - 4y - 60 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$(y-10)(y+6) = 0$$

$$y-10 = 0 ; y_1 = 10$$

$$y+6 = 0 ; y_2 = -6$$

Hay dos puntos que distan 10 unidades de $A(1,2)$ y son:

$$\mathbf{B(-5,10) \text{ y } C(-5,-6)}$$

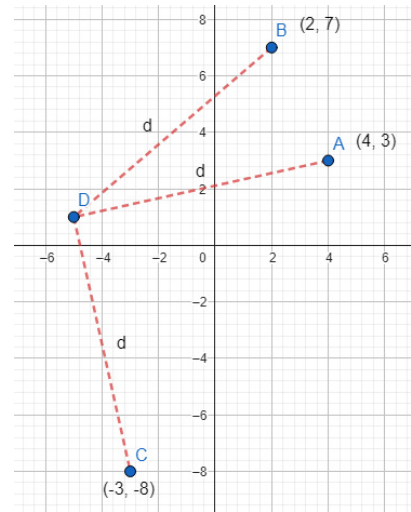
Ejemplo 3. Graficar y hallar la coordenada del punto que equidista de los puntos $A(4,3)$, $B(2,7)$ y $C(-3,-8)$.

La distancia de $D(x,y)$ a todos los puntos es igual:

$$BD = \sqrt{(x-2)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 14y + 53}$$

$$AD = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}$$

$$CD = \sqrt{(x+3)^2 + (y+8)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 16y + 73}$$



$$BD = AD ; \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 14y + 53} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y transponiendo términos:

$$x^2 + y^2 - 4x - 14y + 53 = x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25 ; 4x - 8y = -28 ; x - 2y = -7$$

$$BD = CD ; \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 14y + 53} = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 16y + 73}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 14y + 53 = x^2 + y^2 + 6x + 16y + 73 ; 10x + 30y = -20 ; x + 3y = -2$$

Resolviendo el sistema resultante:

$$x - 2y = -7$$

$$x + 3y = -2$$

Despejando x en 1 y sustituyendo en 2:

$$x = 2y - 7$$

$$2y - 7 + 3y = -2 ; 5y = 5 ; y = 1$$

$$x = 2(1) - 7 ; x = -5$$

El punto que equidista de los puntos dados es $D(-5,1)$

Ejemplo 4. Hallar las coordenadas del centro de la circunferencia de radio 5 que pasa por $B(10,2)$ y $A(3,3)$

El centro es un punto $C(x,y)$ que equidista a todos los puntos de la circunferencia.

$$CB = 5 ; \sqrt{(x-10)^2 + (y-2)^2} = 5$$

$$x^2 - 20x + 100 + y^2 - 4y + 4 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 20x - 4y = -79$$

$$CA = 5 ; \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = 5$$

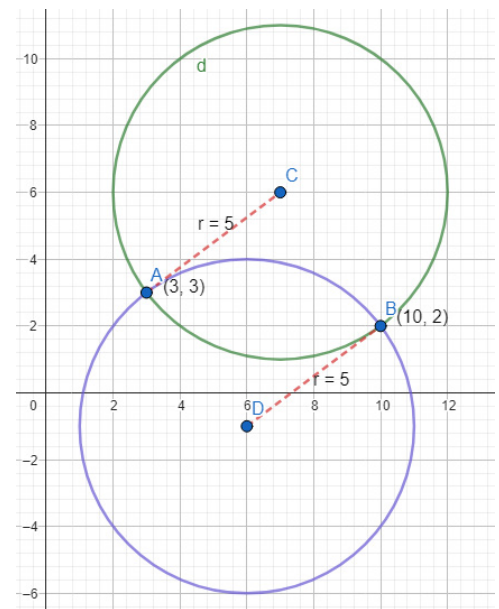
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7$$

Cambiando el signo a la primera ecuación y sumando:

$$\begin{cases} -x^2 - y^2 + 20x + 4y = 79 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7 \\ \hline 14x - 2y = 86 \end{cases}$$

$$7x - y = 43 ; y = 7x - 43$$



Sustituyendo en una de las ecuaciones de la distancia:

$$x^2 + (7x - 43)^2 - 6x - 6(7x - 43) = 7$$

$$x^2 + 49x^2 - 602x + 1849 - 6x - 42x + 258 - 7 = 0 ; 50x^2 - 650x + 2100 = 0$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0 ; (x-7)(x-6) = 0 ; x_1 = 7, x_2 = 6$$

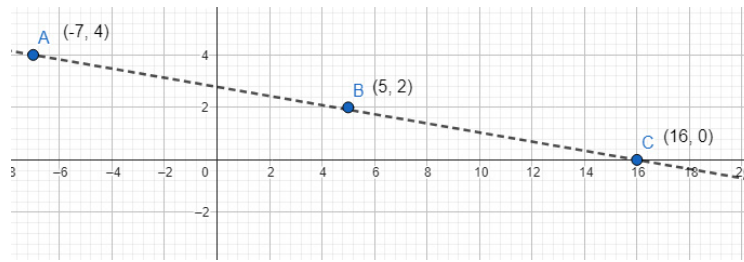
$$y_1 = 7(7) - 43 ; y_1 = 6$$

$$y_2 = 7(6) - 43 ; y_2 = -1$$

Hay dos posibles centros que equidistan 5 unidades de los puntos dados

$$C_1(7,6) \text{ y } C_2(6,-1)$$

Ejemplo 5. Demuestra analíticamente qué los puntos $(-7, 4)$, $(5, 2)$, $(16, 0)$ no son colineales.



Si los puntos están alineados y utilizando la distancia como argumento para comprobar, la distancia entre los extremos AC debería ser igual a la suma de los segmentos $AB + BC$.

$$AC = \sqrt{(16+7)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{529+16} = \sqrt{545}$$

$$AB = \sqrt{(5+7)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{144+4} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

$$BC = \sqrt{(16-5)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$AC = AB + BC ; \sqrt{545} \neq 2\sqrt{37} + 5\sqrt{5} \therefore \text{Los puntos no son perfectamente colineales.}$$

Nota: En la gráfica los puntos son prácticamente colineales y si usamos decimales para calcular las raíces, los resultados se aproximan mucho, pero no son estrictamente colineales.

$$23.345 \approx 12.165 + 11.18 ; 23.345 \approx 23.345$$

Más adelante podremos comprobar este resultado usando el método de las pendientes para verificar la conclusión que obtuvimos.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Frecuentemente se necesita fraccionar un segmento de recta de forma que nos queden partes que tengan una relación requerida entre sí. Por ejemplo, cortar un segmento de manera que la primera parte sea la mitad de la segunda. Para ilustrar el concepto vea la siguiente imagen y trate de hacer los siguientes ejercicios:

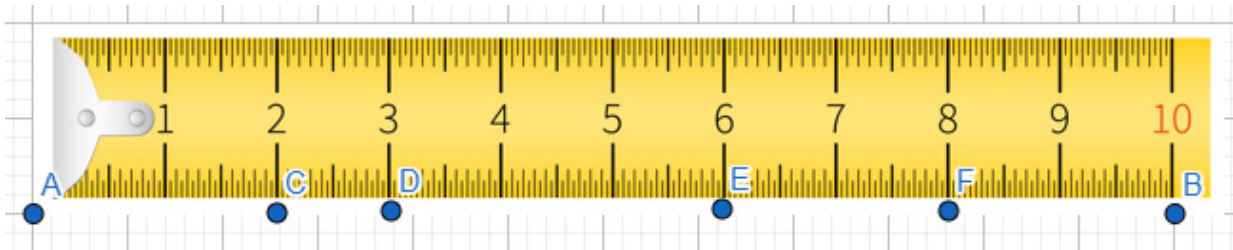
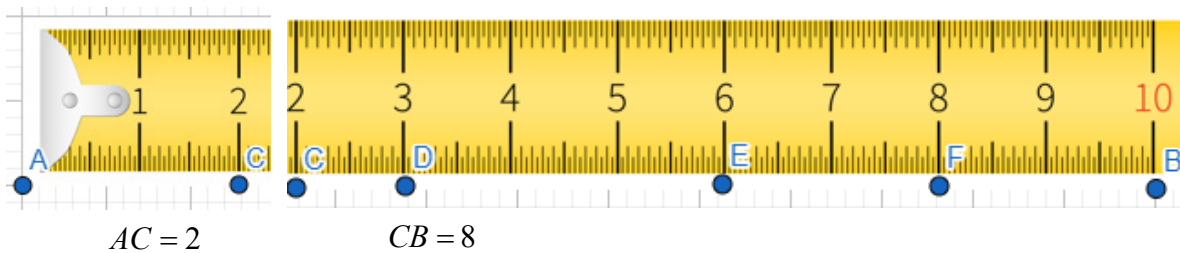


Imagen tomada de freepick.com libre de derechos de autor.

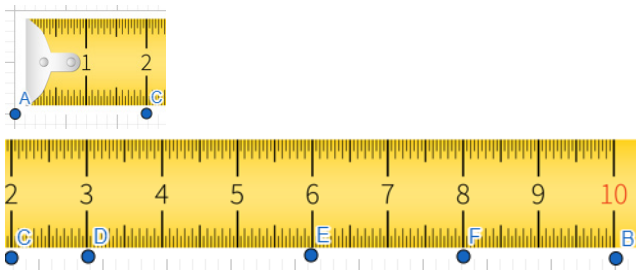
Sea A el inicio de un segmento que termina en B. $AB = 10$. Cortando el segmento AB en el punto C las dos partes que quedan son $AC = 2$, $CB = 8$



Comparando la longitud de la primera parte contra la segunda se obtiene la razón:

$$r_c = \frac{2}{8} \text{ o bien } r_c = \frac{1}{4}$$

Esto se interpreta de la siguiente forma: "La razón en la que el punto C divide al segmento que inicia en A y termina en B es $r_c = 1/4$ ". Significa que el segmento AC mide la cuarta parte del segmento CB



Ejemplo 1. Calcule la razón en la que el punto indicado divide al segmento AB:

$$r_D = \frac{AD}{DB}; r_D = \frac{3}{7}$$

Ejercicio 1: $r_E =$

Ejercicio 2: $r_F =$

Ejemplo 2. Calcule la razón en que divide el punto indicado al segmento dado:

El punto D al segmento CF:

$$r_D = \frac{CD}{DF}; r_D = \frac{1}{5}$$

Ejercicio 3. El punto E al segmento AF:

Ejercicio 4. El punto F al segmento AE:

En general, la fórmula para calcular la razón r en la que un punto $P(x, y)$ divide al segmento que inicia en $P_1(x_1, y_1)$ y termina en $P_2(x_2, y_2)$ es:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2}$$

Si lo que necesitamos es calcular las coordenadas del punto de división conociendo el punto inicial, el punto final y la razón deseada, las fórmulas son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

En la práctica puede haber tres casos distintos:

- Conocer las coordenadas del punto de división dados los puntos inicial, final y la razón.
- Conocer la razón si tenemos las coordenadas de los puntos inicial, final y de división.
- Conocer el punto inicial o el final conociendo la razón, el punto de división y el otro extremo.

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas de un punto que divide al segmento AB en la razón dada r.

$$A(3,-1), B(9,7), r = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3 + \frac{1}{2}(9)}{1 + \frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{2} = \frac{6+9}{2+1} = \frac{15}{3}; x = 5$$

$$y = \frac{-1 + \frac{1}{2}(7)}{1 + \frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{2} = \frac{-2+7}{2+1}; y = \frac{5}{3}$$

El punto que divide al segmento AB en la razón dada es $P\left(5, \frac{5}{3}\right)$

Ejemplo 2. $H(x, y)$ es el quinto de los puntos que dividen al segmento AB en 8 partes iguales, $A(-6,2)$ y $B(2,-1)$. Hallar las coordenadas de H.

$$r = \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{-6 + \frac{5}{3}(2)}{1 + \frac{5}{3}} \cdot \frac{3}{3} = \frac{-18+10}{3+5} = -\frac{8}{8}; x = -1$$

$$y = \frac{2 + \frac{5}{3}(-1)}{1 + \frac{5}{3}} \cdot \frac{3}{3} = \frac{6-5}{3+5} = \frac{1}{8}; y = \frac{1}{8}$$

$H\left(-1, \frac{1}{8}\right)$

Ejemplo 3. $M(-3,5)$ divide al segmento AB en una razón $r = -3 / 7$. Hallar las coordenadas de A si $B(4,-2)$

En la ecuación la incógnita ahora son las coordenadas del primer punto del segmento, dado el punto de división, el punto final y la razón. El proceso de despejar la variable buscada es el siguiente:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}; x(1+r) = x_1 + rx_2; x_1 = x(1+r) - rx_2$$

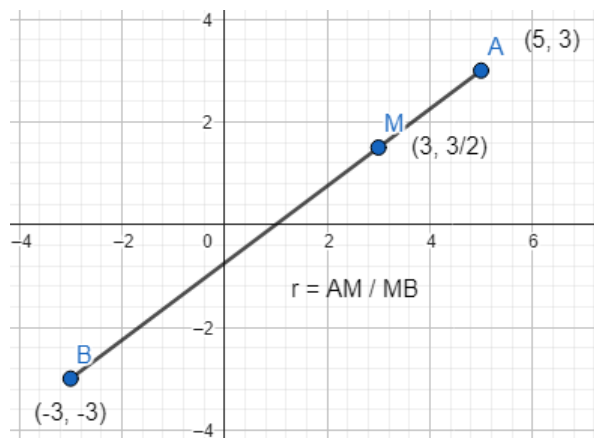
$$x_1 = -3 \left(1 - \frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{3}{7}\right)(4) = -3 + \frac{9}{7} + \frac{12}{7} = -3 + \frac{21}{7} = -3 + 3; x_1 = 0$$

O bien sustituir los datos en la ecuación y posteriormente despejar la única variable que queda:

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}; 5 = \frac{y_1 - \frac{3}{7}(-2)}{1 - \frac{3}{7}} \cdot \frac{7}{7}; 5 = \frac{7y_1 + 6}{7-3}; 5(4) = 7y_1 + 6; y_1 = \frac{20-6}{7}; y_1 = 2$$

$A(0,2)$

Ejemplo 4. Los extremos de un segmento son $A(5,3)$ y $B(-3,-3)$. ¿En qué razón divide $M(3, 3/2)$ al segmento AB ?



La razón r puede calcularse en la ecuación de las abscisas o en la de las ordenadas.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$$

$$3 = \frac{5 + r(-3)}{1+r}; 3 + 3r = 5 - 3r$$

$$3r + 3r = 5 - 3$$

$$6r = 2; r = \frac{2}{6} \text{ o bien } r = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 5. Si las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo son $I(-2,1), J(5,2), K(2,-3)$ hallar las coordenadas de sus vértices.

El punto medio es un caso especial que frecuentemente se presenta. Al dividir por la mitad, la razón entre los segmentos resultantes es 1 y la fórmula anterior puede expresarse:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Es decir, se obtiene el promedio de las abscisas y el de las ordenadas para obtener el punto medio.

Solución: $(1,6), (9,-2), (-5,-4)$

Ejemplo 6. $P_1(-1,2)$ y $P_2(3,6)$ son los extremos de un segmento. Calcule las coordenadas del punto $P(x,y)$ que divide al segmento en una razón $r = \frac{3}{5}$.

Solución: $P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Ejemplo 7. Encuentre la razón en la que el punto $P(4,3)$ divide al segmento AB si $A(2,5)$ y $B(8,-1)$

Solución: $r = \frac{1}{2}$

$$A(2,-4), P(8,-1) \text{ y } r = \frac{3}{5}, \text{ hallar } B(x_2, y_2)$$

Solución: $B(18,4)$

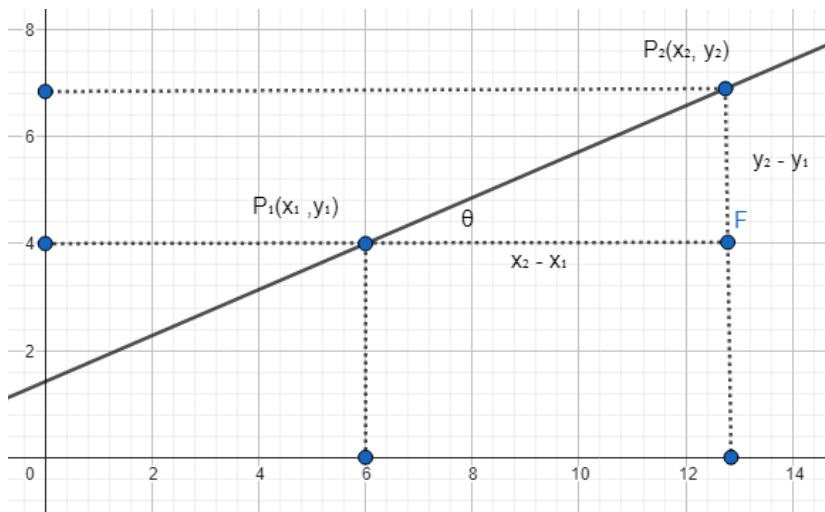
Ejemplo 8. $B(2,5), P(-8,-3)$ y $r = -2$, Hallar $A(x_1, y_1)$

Nota: La razón es negativa porque el punto de división está fuera del segmento.

Solución: $A(12,13)$

PENDIENTE DE UNA RECTA

Una de las propiedades de una recta es su pendiente, que se define como la relación entre la altura que gana o pierde la recta en una distancia determinada. Es decir, la pendiente es la tangente del ángulo de inclinación de la recta.



Usualmente a la pendiente se le denomina m .

$$m = \text{Tan } \theta$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 1. Trazar y hallar el ángulo de inclinación de la recta que pasa por $(2,5)$ y $(9,-3)$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 + 3}{2 - 9}; m = -\frac{8}{7}$$

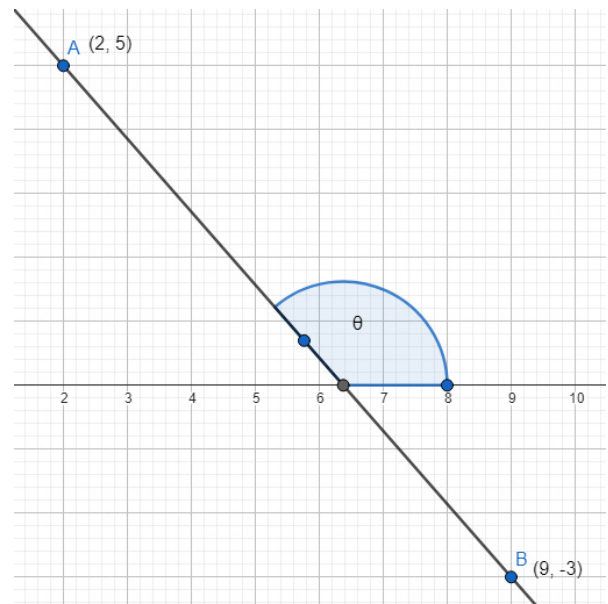
$$\text{Tan } \theta = -\frac{8}{7} \approx -1.143$$

$$\theta = \text{ArcTan}(-1.143)$$

$$\theta = -48.81^\circ$$

Como ángulo positivo:

$$\theta = 131.18^\circ = 131^\circ 11' 9.3''$$



Ejemplo 2. Si una recta que pasa por $(-8, -4)$ y $(5, y)$ tiene un ángulo de inclinación de 45° , ¿Cuál es el valor de y ?

Si $\theta = 45^\circ, m = \tan 45^\circ; m = 1$

$$1 = \frac{y+4}{5+8}; 13 = y+4; y = 9$$

Ejemplo 3. La recta L_1 pasa por $(-2, 7)$ y $(x, 1)$; L_2 pasa por $(-4, -2)$ y $(-2, 1)$. Hallar "y" si ambas rectas son paralelas.

Si dos rectas son paralelas sus pendientes son iguales.

$$\frac{1-7}{x+2} = \frac{-2-1}{-4+2}; \frac{-6}{x+2} = \frac{-3}{-2}; 12 = -3x-6; 3x = -6-12; x = -\frac{18}{3}; x = -6$$

Ejemplo 4. La recta que pasa por $(-5, y)$ y $(1, 6)$ es perpendicular a otra que pasa por $(-3, 2)$ y $(4, -3)$. Hallar la ordenada "y".

Si dos rectas son perpendiculares sus pendientes son recíprocas y de signo opuesto.

$$m_1 m_2 = -1; m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$m_1 = \frac{y-6}{-5-1} = \frac{y-6}{-6}$$

$$m_2 = \frac{-3-2}{4+3} = -\frac{5}{7}; -\frac{1}{m_2} = \frac{7}{5}$$

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}; \frac{y-6}{-6} = \frac{7}{5}; 5y-30 = -42; 5y = -42+30; y = -\frac{12}{5}$$

Ejemplo 5. Hallar las coordenadas de un punto G (x, y) que cumple con las siguientes condiciones:

La distancia a C (-1, 1) es $\sqrt{20}$

La pendiente con B (6, 8) es 3

Solución: G (3, -1)

Ejemplo 6. Hallar la pendiente de las rectas L_1 que pasa por $(1,5)$ y $(3,8)$ y L_2 que pasa por $(-4,1)$ y $(0,7)$; determine si las rectas son paralelas, coincidentes, perpendiculares o ninguno de los casos.

Solución: $m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = \frac{3}{2}; \therefore L_1 \text{ PL}_2$

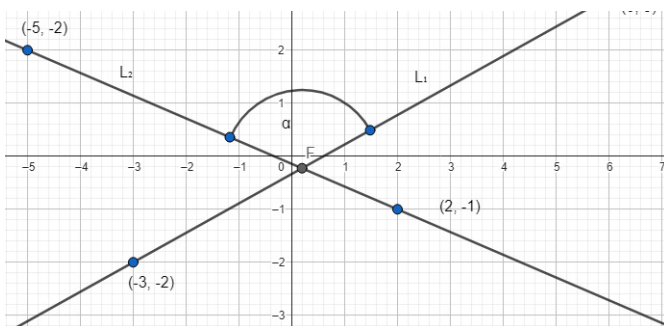
ÁNGULO ENTRE RECTAS

Dos rectas no paralelas siempre se interseptan y si no son perpendiculares forman un par de ángulos suplementarios. Para determinar el ángulo α entre ellas se puede usar la expresión siguiente:

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Donde m_1 es la pendiente de la recta inicial del ángulo de interés y m_2 es la pendiente de la recta final, siempre recorriendo el ángulo en el sentido inverso a las manecillas del reloj. Si llegara a invertirse el orden por error, el ángulo que se obtendría sería el suplementario del buscado.

Ejemplo 1. Hallar el ángulo obtuso formado por las rectas L_A que pasa por $(-5,2)$ y $(2,-1)$ y la recta L_B que pasa por $(-3,-2)$ y $(6,3)$.



$$L_1 = L_B \text{ y } L_2 = L_A$$

$$m_2 = \frac{2+1}{-5-2}; m_1 = -\frac{3}{7}$$

$$m_1 = \frac{3+2}{6+3}; m_2 = \frac{5}{9}$$

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{3}{7} - \frac{5}{9}}{1 + \left(-\frac{3}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right)} \cdot \frac{63}{63}$$

$$\tan \alpha = 1.2917; \alpha = \text{ArcTan}(1.2917); \hat{\alpha} = 127.75^\circ = 127^\circ 45'$$

$$\tan \alpha = \frac{-27-35}{63-15} = -\frac{62}{48}$$

Ejemplo 2. Hallar los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son: $(-3, -2)$, $(2, 5)$, $(4, 2)$

Solución: $24^\circ 43'$, $69^\circ 14'$, $86^\circ 03'$

Ejemplo 3. Una recta L_1 tiene pendiente $m_1 = -\frac{7}{4}$; la recta L_2 tiene pendiente $m_2 = \frac{1}{8}$, hallar la pendiente de la recta bisectriz del ángulo que forman.

Nota: La recta bisectriz corta el ángulo por la mitad.

Solución: 2 ó $-\frac{1}{2}$

ECUACIÓN DE LA RECTA

Una recta se puede definir como el lugar geométrico de los puntos que tienen pendiente constante entre cualquier par de ellos.

La ecuación de una recta puede determinarse con un par de datos por lo menos y dependiendo de cuáles sean esos dos datos, puede obtenerse usando distintas formas. Aquí vamos a revisar las más comunes que son:

FORMA PUNTO-PENDIENTE

Como su nombre lo indica, si se conoce un punto cualquiera de la recta $P_1(x_1, y_1)$ y la pendiente m de la misma, su ecuación sería:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Donde x e y son las variables propias de la ecuación que puede tomar infinita cantidad de puntos en un plano de dos dimensiones. Luego de sustituir los datos, de efectuar los productos y de igualar la ecuación a cero, se llega a una expresión que comúnmente llamamos *forma general* de la ecuación de la recta, que tiene forma $Ax + By + C = 0$

Para profundizar más en la definición y en los parámetros para obtener la ecuación de una recta se proporciona la liga a un video explicativo: <https://youtu.be/GBSmycLgTeU>

Ejemplos:

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-4, 2)$ y $(1, -3)$

$$m = \frac{2+3}{-4-1} = \frac{5}{-5}; m = -1$$

Cualquiera de los puntos debe satisfacer la ecuación de la recta, así que libremente escogemos uno de ellos para hallar la ecuación. Para este ejemplo será el punto $(-4, 2)$.

$$y - 2 = -1(x + 4); y - 2 = -x - 4; x + y + 2 = 0$$

2. Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto $(3, -2)$ y es paralela a otra recta que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(4, 3)$.

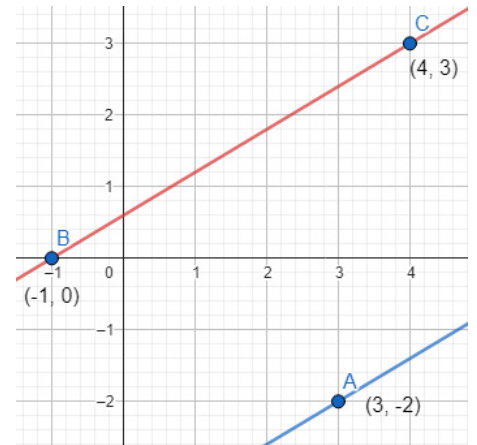
Se tiene un punto y se necesita la pendiente para determinar la ecuación, pero se sabe que si las rectas son paralelas sus pendientes son iguales.

$$m = \frac{3-0}{4+1}; m = \frac{3}{5}$$

$$y + 2 = \frac{3}{5}(x - 3)$$

$$5y + 10 = 3x - 9$$

$$3x - 5y - 19 = 0$$



3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(3, -2)$ y es perpendicular a otra recta que pasa por $(-3, -1)$ y $(7, 3)$.

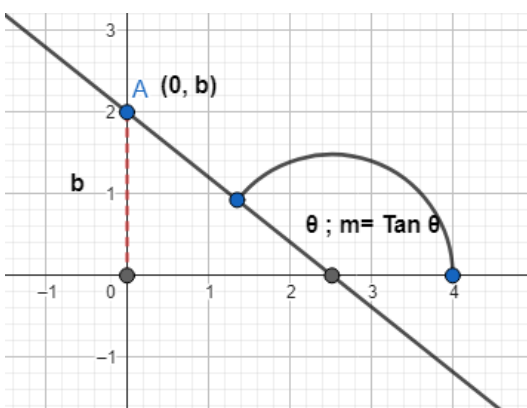
Solución: $5x + 2y - 11 = 0$

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + 3y - 6 = 0$ y $x - 3y + 6 = 0$ y por el punto $(5, 5)$

Solución: $3x - 5y + 10 = 0$

FORMA PENDIENTE-ORDENADA EN EL ORIGEN

Es una forma útil para encontrar la ecuación de la recta si se conoce su pendiente y el punto en el que corta el eje de las ordenadas o eje y . Este punto tiene coordenada $(0, b)$.



Conociendo la pendiente m y la ordenada en el origen b , la ecuación de la recta es:

$$y = mx + b$$

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la recta con ordenada en el origen $b = -6$ y pendiente $m = -\frac{3}{5}$

Para graficar la pendiente, recordar su significado que es que, al recorrer tres unidades a la izquierda, la recta sube cinco unidades.

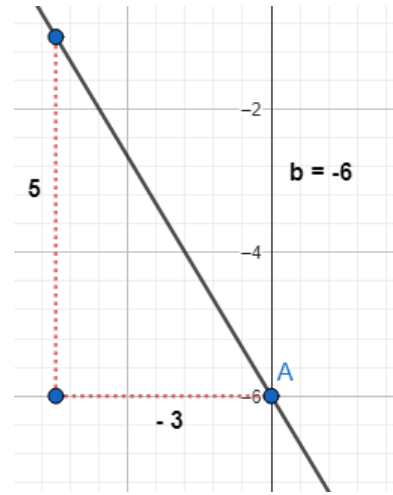
Teniendo los datos necesarios, usar la forma dada:

$$y = -\frac{3}{5}x - 6$$

Multiplicando toda la ecuación por 5:

$$5y = -3x - 30$$

$$3x + 5y + 30 = 0$$



Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $m = 2$ y con la misma ordenada en el origen que la recta $5x - 2y + 7 = 0$

Para poder hallar la ecuación de la recta que buscamos nos falta solamente la ordenada en el origen. Si es la misma que la de la recta dada, solo necesitamos transformar la ecuación a la forma pendiente-ordenada en el origen para extraer b . Esto es, hay que despejar y y comparar.

$$5x - 2y + 7 = 0$$

$$5x + 7 = 2y ; y = \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$$

Comparando con $y = mx + b$, queda claro que el dato que estamos buscando es $b = \frac{7}{2}$

Ahora podemos encontrar la ecuación de la recta que buscamos:

$$y = 2x + \frac{7}{2}$$

Multiplicamos toda la ecuación por 2 e igualamos a cero:

$$2y = 4x + 7$$

$$4x - 2y + 7 = 0$$

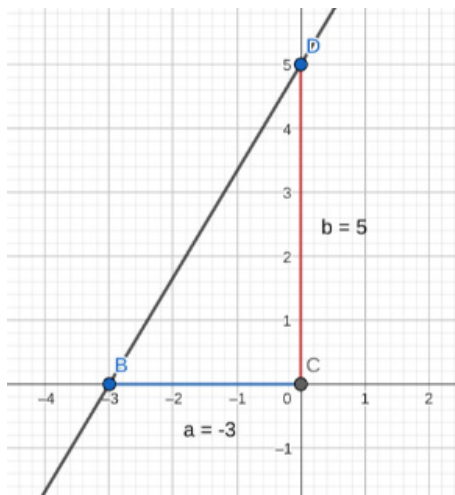
FORMA ABCISA Y ORDENADA EN EL ORIGEN O FORMA SIMÉTRICA DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

Esta es otra forma para obtener la ecuación de la recta directamente cuando se conocen los puntos en los que corta ambos ejes, es decir, cuando se conocen la abscisa en el origen "a" y la ordenada en el origen "b". Su forma es la siguiente:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Donde los puntos conocidos son $(a,0)$ y $(0,b)$ en los que la recta corta los ejes de coordenadas. Otra opción podría ser la de hallar la pendiente y con uno de los puntos la ecuación, pero esta opción es directa y permite ver las mencionadas coordenadas en el origen.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la recta con abscisa en el origen -3 y ordenada en el origen 5 .



$$a = -3, b = 5$$

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$$

Esta es la ecuación en forma canónica porque podemos analizar sus partes con más facilidad. Es común pasarla a forma general.

$$\left[-\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1 \right] (-15)$$

$$5x - 3y = -15$$

$$5x - 3y + 15 = 0$$

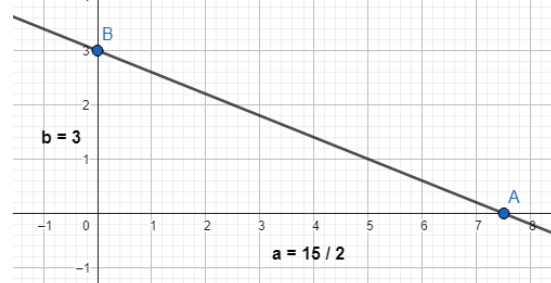
Ejemplo 2. Pasar de la forma general a la forma simétrica, hallar "a" y "b" y graficar la recta $2x + 5y - 15 = 0$

Primero transponer el término independiente: $2x + 5y = 15$

Dividir toda la ecuación por el término independiente y enviar los coeficientes al denominador:

$$\frac{2x}{15} + \frac{5y}{15} = \frac{15}{15}; \frac{2x}{15} \cdot \frac{1}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

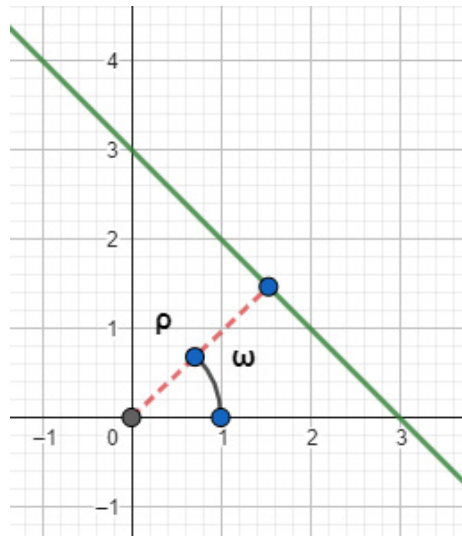
$$\frac{x}{15/2} + \frac{y}{3} = 1; a = \frac{15}{2}, b = 3$$



FORMA NORMAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

Si se conoce la distancia normal del origen a la recta (ρ) y su ángulo (ω), la ecuación de la recta es:

$$x \cos \omega + y \operatorname{Sen} \omega - \rho = 0$$



Se le llama forma normal porque la distancia " ρ " debe ser medida perpendicularmente. El ángulo con dicha distancia " ω " no debe confundirse con el ángulo de inclinación de la recta.

Para cambiar la ecuación de la recta de la forma general a la forma normal y poder determinar su distancia perpendicular al origen, se sigue el siguiente procedimiento:

$$Ax + By + C = 0$$

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Los signos que anteceden a la raíz se definen de la siguiente manera:

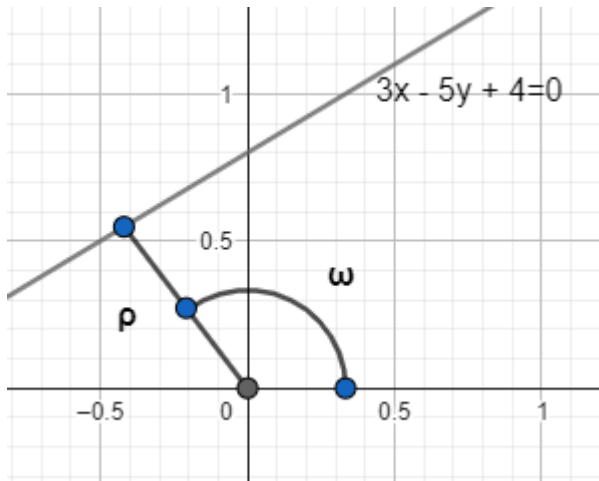
Si $C \neq 0$, entonces el radical tendrá el signo opuesto al de C .

Si $C = 0$, entonces el signo del radical será igual al de B .

Si $C = B = 0$, el signo del radical será el mismo que el de A .

$$\cos \omega = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} ; \operatorname{Sen} \omega = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} ; \rho = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo 1. Pasar la ecuación de la recta $3x - 5y + 4 = 0$ a la forma normal, hallar " ρ " y " ω ".



$$\frac{3x - 5y + 4}{-\sqrt{3^2 + 5^2}} = 0; \frac{3x - 5y + 4}{-\sqrt{9 + 25}} = 0$$

$$\frac{3x - 5y + 4}{-\sqrt{34}} = 0$$

$$\cos \omega = -\frac{3}{\sqrt{34}} \text{ y } \text{Sen} \omega = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\omega = \text{ArcCos}(-0.5145); \hat{u} = 120.96^\circ$$

$$-\rho = -\frac{4}{\sqrt{34}} \cdot \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{34}}; \hat{n} = \frac{2\sqrt{34}}{17}$$

La aplicación más importante de la forma normal es la de hallar la distancia perpendicular de un punto cualquiera a una recta. Para ilustrar esto se muestra un ejemplo con algunos comentarios en pasos cruciales del procedimiento.

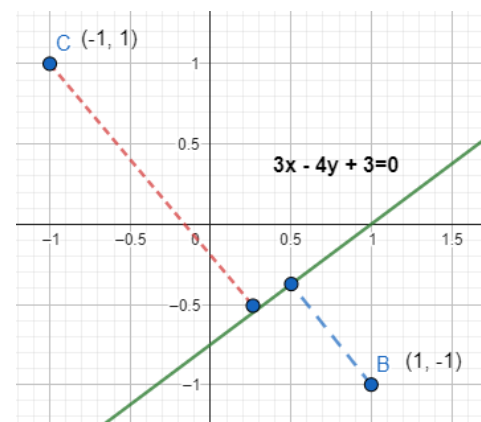
Ejemplo 2. Hallar la distancia entre los puntos $B(1, -1)$ y $C(-1, 1)$ y la recta $3x - 4y - 3 = 0$.

$$\frac{3x - 4y - 3}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 0; \frac{3x - 4y - 3}{5} = 0$$

La distancia se obtiene sustituyendo el punto en la forma normal:

$$d_B = \frac{3(1) - 4(-1) - 3}{5}; d_B = \frac{4}{5}$$

$$d_C = \frac{3(-1) - 4(1) - 3}{5}; d_C = -\frac{10}{5} = -2^*$$



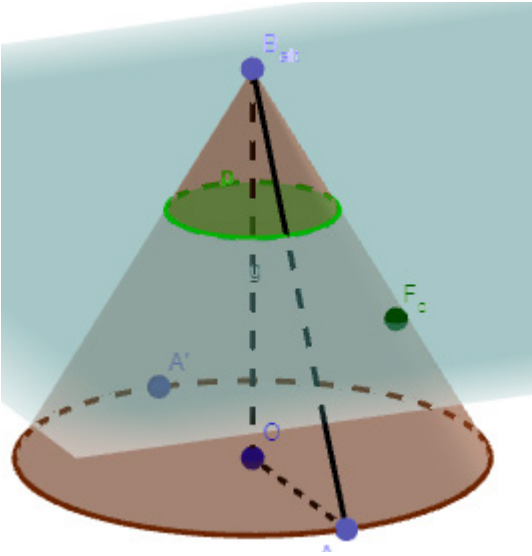
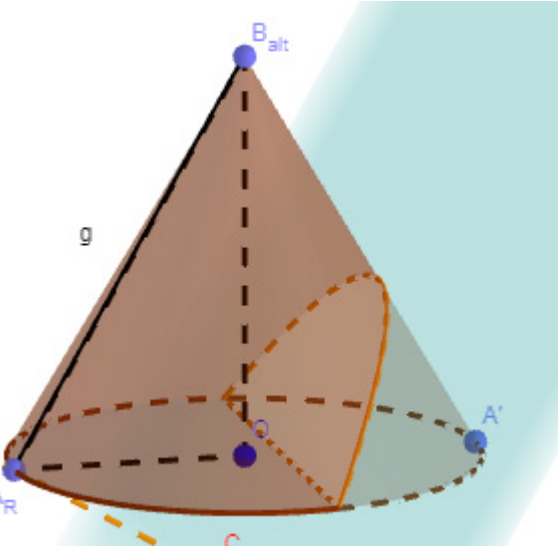
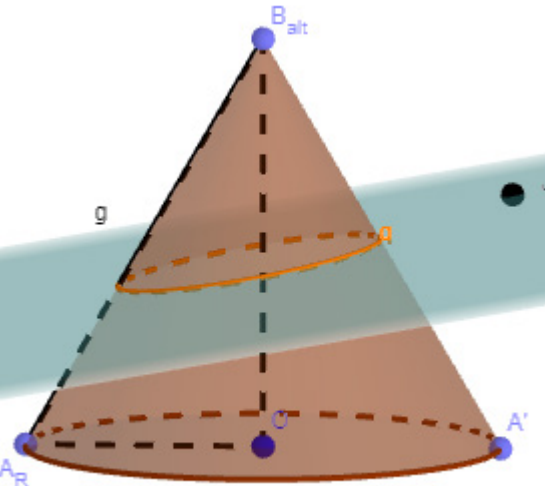
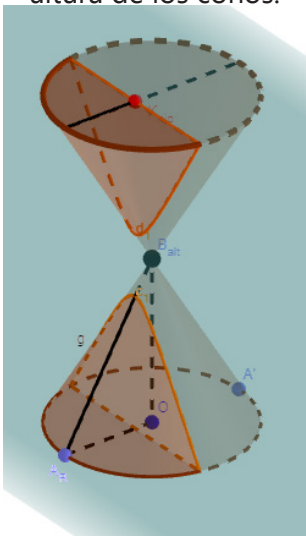
El valor de d_C se interpreta como 2 unidades de longitud y su signo es negativo ya que el punto C y el origen se encuentran del mismo lado de la recta.

Otras aplicaciones de esta forma de la ecuación de la recta son la de hallar la distancia que separa a dos rectas paralelas o la de hallar el radio de una circunferencia que es tangente a una recta dada.

Con este tema terminamos de ver lo fundamental de las formas de la ecuación de una recta o de las ecuaciones lineales. Ahora pasaremos a formas que tienen ecuaciones cuadráticas.

CÓNICAS

Hay un grupo de curvas que se pueden obtener a partir de cortar un cono circular recto con un plano. Dependiendo del ángulo en que el plano corta el cono, se genera una curva distinta.

<p>Circunferencia Se genera al cortar el cono en un ángulo perpendicular a la altura del cono.</p> 	<p>Parábola Se genera cortando una generatriz del cono con el plano en un ángulo cualquiera que no sea normal a la altura.</p> 
<p>Elipse Se genera cortando ambas generatrices con el plano en un ángulo cualquiera que no sea normal a la altura.</p> 	<p>Hipérbola Se genera cuando el plano corta a un par de conos invertidos en un ángulo paralelo a la altura de los conos.</p> 

Las cónicas en general tienen una ecuación general polinómica de segundo grado que tiene la forma: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Es posible discriminar y saber cuál es la cónica a la que representa la ecuación si observamos detalladamente sus términos.

Ahora estudiaremos cada una de ellas por separado, sus definiciones, la forma de su ecuación, los casos más representativos y algunos ejemplos de sus aplicaciones.

CIRCUNFERENCIA

La circunferencia se puede definir como **el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro**.

Usualmente al centro se le denomina como $C(h,k)$ y al radio como r . Entonces, si calculamos la distancia de un punto $p(x,y)$ cualquiera, tendríamos:

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} ; (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esa es la **forma canónica** de la ecuación de una circunferencia cualquiera.

Frecuentemente necesitamos obtener la ecuación de una circunferencia que tiene su centro en el origen o bien por conveniencia suponemos que el centro está en el origen. Entonces la ecuación anterior se simplifica porque el $C(h,k)$ es $C(0,0)$. Si sustituimos en la forma canónica, obtenemos la ecuación de este caso especial que es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

En general, se puede reconocer que una ecuación cuadrática con dos variables se refiere a una circunferencia porque los coeficientes de los términos cuadráticos son exactamente iguales.

Existen múltiples aplicaciones de la circunferencia, algunas de ellas muy sencillas e intuitivas, pero otras un poco más complejas porque implican relaciones con diversos temas estudiados anteriormente, así que veremos ejemplos de los más sencillos o directos, a los más complejos.

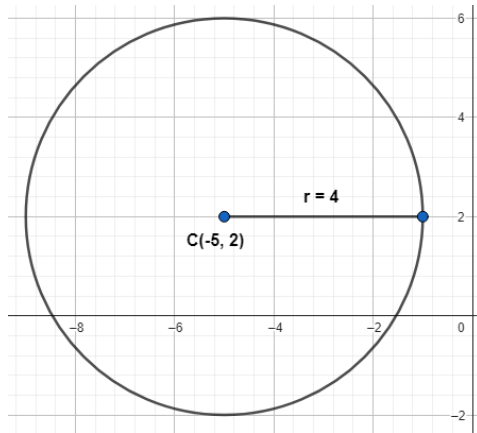
En algunos problemas podríamos prescindir de las gráficas, pero se hace la sugerencia de que se grafique en la medida de lo posible, según las herramientas disponibles, para potenciar la capacidad de interpretar el problema y proponer una solución. Habrá problemas que pueden ser resueltos desde varias perspectivas, por lo que se alienta al estudiante a intentar resolverlos con una mente propositiva y abierta, para analizar luego de obtener resultados si estos son factibles.

Los métodos más recomendables suelen ser los que sean más fáciles de recordar y de replicar por los demás, los que impliquen orden, exactitud y también hay que decirlo, que estéticamente sean más atractivos.

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de la circunferencia que cumple...

Su radio es $r = 6$ y tiene su centro en el punto $C(-5, 2)$.



$$h = -5, k = 2, r = 6$$

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = (6)^2$$

Esta es la forma canónica, de donde se pueden extraer por simple observación los datos.

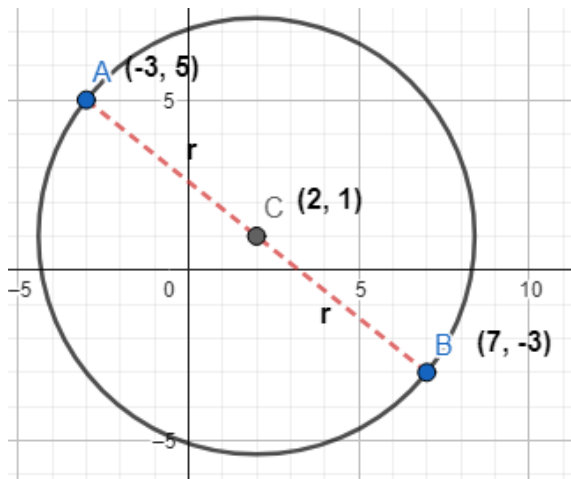
$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 36$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 - 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 4y - 7 = 0$$

Esta es la forma desarrollada.

2. Tiene un diámetro en el segmento formado por $A(-3, 5)$ y $B(7, -3)$



Hallar el punto medio que es el centro:

$$h = \frac{-3+7}{2} = 2 ; k = \frac{5-3}{2} = 1 ; C(2, 1)$$

Hallar el radio CA o CB:

$$r = \sqrt{(2+3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25+16}; r = \sqrt{41}$$

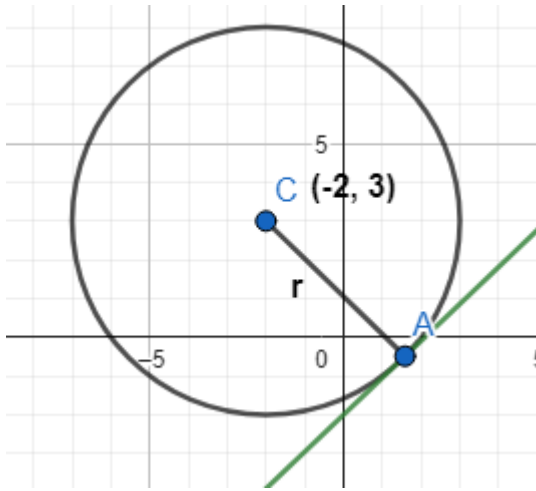
La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{41})^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 41$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 36 = 0$$

3. Centro en $c(-2,3)$ y tangente a la recta $20x - 21y - 42 = 0$.



La distancia del punto a la recta es el radio:

$$r = \frac{20(-2) - 21(3) - 42}{\sqrt{(20)^2 + (21)^2}} = \frac{-40 - 63 - 42}{\sqrt{400 + 441}}$$

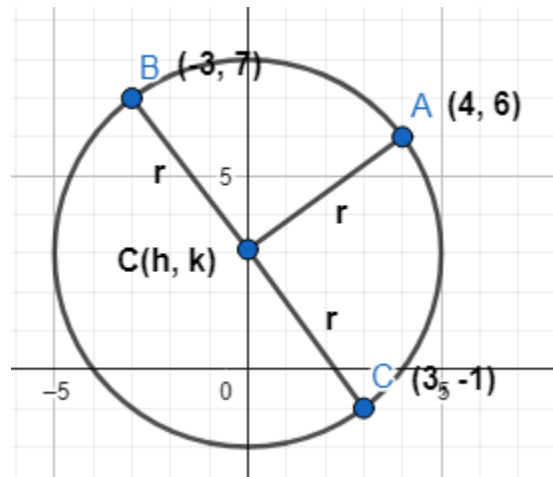
$$r = \frac{145}{\sqrt{841}} = \frac{145}{29}; r = 5; C(-2, 3)$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (5)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 25$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0}$$

4. Pasa por los puntos $A(4,6), B(-3,7)$ y $C(3,-1)$.



El centro equidista de A, B y C :

$$CA = CB$$

$$\sqrt{(h+3)^2 + (k-7)^2} = \sqrt{(h-4)^2 + (k-6)^2}$$

$$\boxed{h^2} + 6h + 9 + \boxed{k^2} - 14k + 49 = \boxed{h^2} - 8h + 16 + \boxed{k^2} - 12k + 36$$

$$14h - 2k = -6; 7h - k = -3$$

$$CA = CD$$

$$\sqrt{(h+3)^2 + (k-7)^2} = \sqrt{(h-3)^2 + (k+1)^2}$$

$$h^2 + 6h + 9 + k^2 - 14k + 49 = h^2 - 6h + 9 + k^2 + 2k + 1$$

$$12h - 16k = -48 ; 3h - 4k = -12$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones para encontrar $C(h,k)$:

$$\begin{array}{l} -4 \{ 7h - k = -3 \\ 1 \{ 3h - 4k = -12 \end{array}$$

$$\underline{-28h + 4h = 12}$$

$$\underline{3h - 4k = -12}$$

$$-25h = 0; h = 0$$

$$7(0) - k = -3; k = 3$$

$$C(0, 3)$$

$$r = CA = \sqrt{(0+3)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}; r = 5$$

$$(x+0)^2 + (y-3)^2 = (5)^2$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0}$$

Dada la ecuación de la circunferencia, graficar, reducir a forma ordinaria y hallar centro y radio:

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 26 = 0$$

Agrupar términos por variable y transponer el término independiente.

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 10y) = -26$$

Completar los trinomios cuadrados perfectos y balancear la ecuación.

$$\left(x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 - 10y + \left(\frac{10}{2}\right)^2\right) = -26 + 1 + 25$$

Factorizar los TCP para obtener la forma canónica y concluir.

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 0; \text{ Como } r = 0, \text{ se trata de un punto } C(1,5)$$

Existen muchas posibilidades en cuanto a ejemplos para la aplicación de la circunferencia y sería muy ambicioso tratar de abarcarlos todos en este material, pero en general los criterios tienen que ver con la aplicación de los conceptos de geometría, las definiciones básicas y el uso correcto de las reglas y métodos algebraicos. Este tema es una buena oportunidad para poner en juego los conocimientos previos de los estudiantes.

Ejercicios diversos.

Hallar la ecuación de la circunferencia que cumple:

1. $C(-4,2), r = 4$
2. $C(-4,3)$, y tangente al eje "y"
3. $C(-1,-3)$ y tangente a la recta que pasa por $(-2,4)$ y $(2,1)$
4. Centro sobre el eje "x" y pasa por $(-2,3)$ y $(4,5)$
5. Centro sobre la recta $3x - 2y - 9 = 0$ y pasa por $(1,8)$ y $(0,-1)$
6. Pasa por los puntos $(5,10)$, $(7,4)$ y $(-9,-4)$
7. Es concéntrica con $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ y tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$
8. Reducir a la forma ordinaria y hallar centro y radio: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Soluciones:

1. $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$
4. $3x^2 + 3y^2 - 14x - 67 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 7 = 0$
6. $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 75 = 0$
7. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
8. $C(2,-3), r = 5$

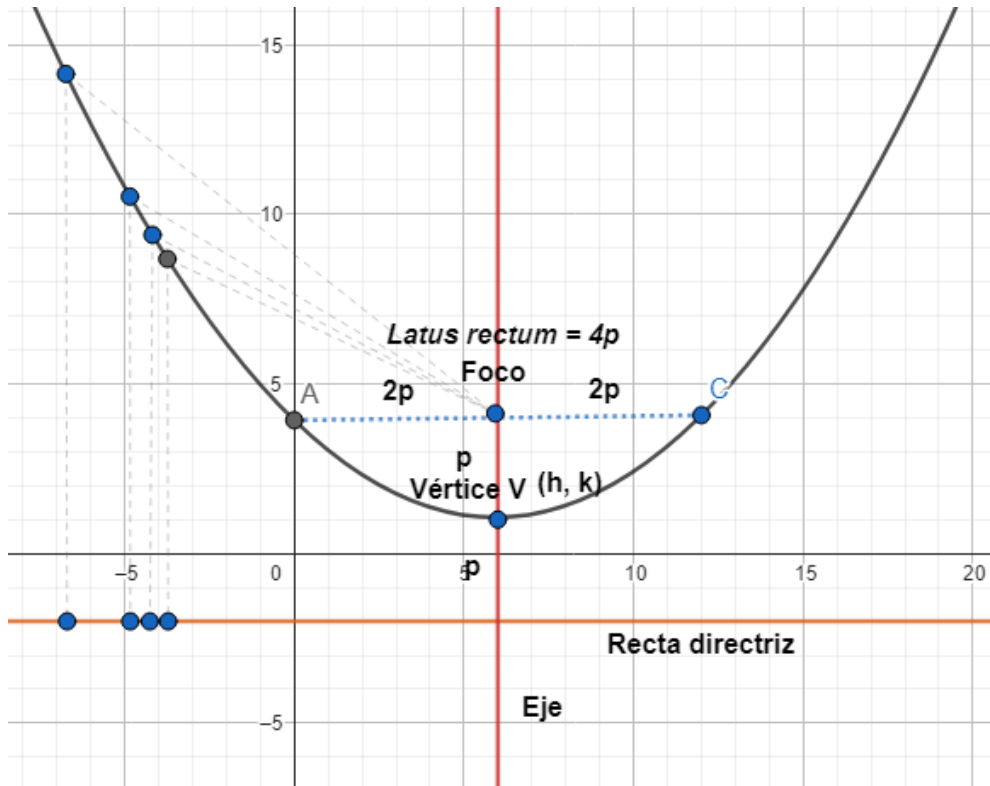
LA PARÁBOLA

Una parábola se define **como el conjunto de puntos en un plano que equidistan de una recta llamada directriz y de un punto fijo llamado foco.**

A continuación, se muestra la gráfica de una parábola vertical (eje de simetría vertical) y se enlistan algunos datos significativos para construir la gráfica e interpretarla:

- Su recta directriz (L_d) es horizontal porque es perpendicular al eje y se puede ver cómo la distancia de cualquier punto al foco es la misma que la distancia a la directriz.
- A la distancia del vértice al foco se le llama "P" y es la misma que la del vértice a la directriz:
 $VF = p$, $VL_d = p$
- La abertura de la curva a la altura del foco se denomina "**latus rectum**" o "**lado recto**" y se calcula $LR = 4p$.

- Las coordenadas del vértice usualmente se denominan $V(h, k)$. El vértice de la parábola es el punto en el que la curva cambia su comportamiento.
- Para determinar la ecuación de una parábola se necesitan dos datos y los diferentes tipos de problema a resolver se definen por los datos disponibles.



En este curso estudiaremos solamente parábolas que tienen eje de simetría vertical u horizontal, aunque puede darse el caso de una parábola con eje inclinado.

La ecuación en forma canónica de una **parábola vertical con vértice** $v(h, k)$ y distancia " p " conocida es:

$$(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$$

Si el vértice está sobre el origen, la ecuación anterior se simplifica a la forma: $x^2 = \pm 4py$

En ambos casos, el signo "+" aplica si la parábola abre hacia arriba y el signo "-" cuando la parábola abre hacia abajo.

La ecuación en forma canónica de una **parábola horizontal con vértice** $v(h, k)$ y distancia " p " conocida es:

$$(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$$

Si el vértice está sobre el origen, la ecuación anterior se simplifica a la forma: $y^2 = \pm 4px$

En ambos casos, el signo "+" aplica si la parábola abre hacia la derecha y el signo "-" cuando la parábola abre hacia la izquierda.

En resumen:

	Horizontal		Vertical	
	$V(0,0)$	$V(h,k)$	$V(0,0)$	$V(h,k)$
Ecuación	$y^2 = \pm 4px$	$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$	$x^2 = \pm 4py$	$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$
Signo +	Derecha	Derecha	Arriba	Arriba
Signo -	Izquierda	Izquierda	Abajo	Abajo

Hay que notar que, en la parábola, la ecuación desarrollada puede tener las formas:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ o bien } By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

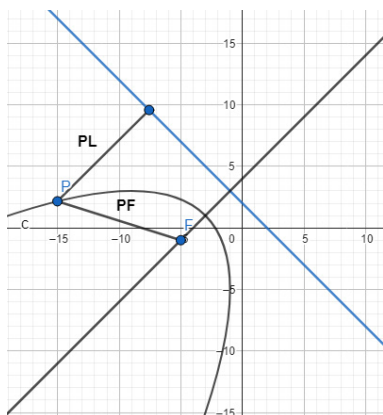
Analizando podemos ver que en la ecuación de una parábola solo hay un término cuadrático y si se trata de Ax^2 , la parábola es vertical y en caso contrario, al tener solo By^2 , la parábola es horizontal.

En Álgebra, al abordar el tema de ecuaciones cuadráticas con una incógnita, se suelen resolver en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, lo que representa una parábola vertical que al estar igualada a cero, nos indica que al resolverla vamos a encontrar los puntos en los que corta el eje "x" (donde $y = 0$). Así se definen las raíces de la ecuación.

Las parábolas tienen aplicaciones en acústica, en óptica y en telecomunicaciones por sus propiedades de reflexión, ya que concentran las ondas en el foco. Es común verlas en antenas, lámparas, linternas, repetidoras de microondas y receptores satelitales.

Ejemplos:

1. Aplicando la definición de parábola hallar la ecuación de la parábola de directriz $L_d : x + y - 2 = 0$ y foco en $F(-5, -1)$.



La distancia de $P(x,y)$ al foco es igual a su distancia a la recta directriz: $PF = PL$

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y+1)^2} = \frac{x+y-2}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = \frac{x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y}{2}$$

Reduciendo y multiplicando ambos lados por 2:

$$2x^2 + 2y^2 + 20x + 4y + 52 = x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4$$

Transponiendo términos para igualar a cero:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 24x + 8y + 48 = 0$$

1. Hallar la ecuación, los elementos y la gráfica de la parábola de $V(0,0), F(0,-4)$

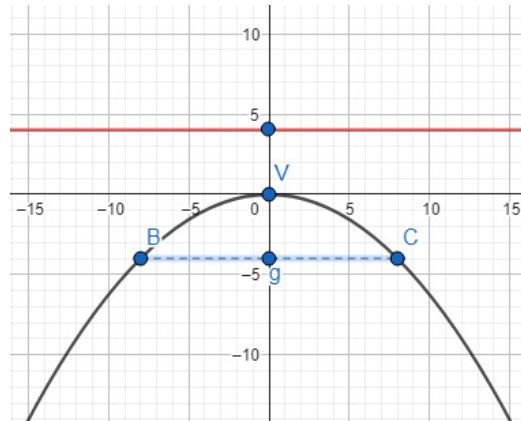
La distancia del vértice al foco es " p "

$$p = 4$$

El eje es vertical y la directriz horizontal y a 4 unidades sobre el vértice:

$$Ld : y = 4 \text{ o } y - 4 = 0$$

El lado recto es $4p$, $LR = 16$ (8 unidades para cada lado del foco y encontramos los puntos B y C (extremos del lado recto). Ya podemos trazar la gráfica con estos elementos.



La ecuación que corresponde utilizar es: $y^2 = -4px$ (parábola vertical $V(0,0)$ que abre hacia abajo)

Sustituyendo los datos queda:

$$y^2 = -16x \text{ o bien } y^2 - 16x = 0$$

2. Hallar la parábola de $V(0,0)$, eje focal sobre el eje " y ", pasa por $(4,-2)$

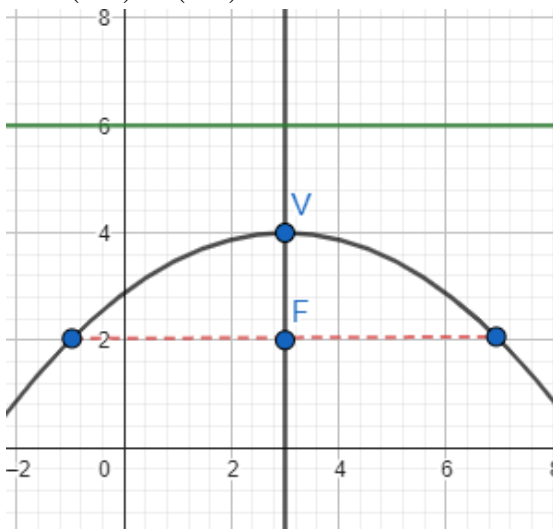
La parábola es vertical porque el eje es el de las ordenadas y como su vértice es $V(0,0)$, sabemos que su ecuación debe tener la forma $y^2 = -4px$ porque el punto queda por debajo del vértice.

Sabemos también que cualquier punto de la parábola debe satisfacer su ecuación, por lo tanto, si reemplazamos las variables de la ecuación por las coordenadas del punto dado, podremos obtener la distancia " p " que nos hace falta para definir la ecuación totalmente.

$$(-2)^2 = -4p(4); 4 = -16p; p = \left| -\frac{4}{16} \right|; p = \frac{1}{4}$$

$$y^2 = -4\left(\frac{1}{4}\right)x; y^2 = -x \text{ o bien } y^2 + x = 0$$

c) $V(3,4), F(3,2)$



La distancia del vértice al foco es $p = 2$; $LR = 8$

Se trata de una parábola vertical que abra hacia abajo.

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

$$(x - 3)^2 = -4(2)(y - 4)$$

$$x^2 - 6x + 9 = -8y + 32$$

$$x^2 - 6x + 8y - 23 = 0$$

3. Hallar la parábola de $V(4,0)$, eje focal horizontal, pasa por $(12,8)$

Los elementos conocidos no permiten hacer una gráfica bien determinada, así que empezaremos analíticamente diciendo que, si el eje focal es horizontal, la parábola es vertical y abre hacia arriba porque el punto está arriba que el vértice, así que su ecuación debe ser:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Sustituimos las coordenadas del vértice en (h,k) y del punto en (x,y) :

$$(12-4)^2 = 4p(8-0); 64 = 32p ; p = 2$$

$$(x-4)^2 = 4(2)(y-0); x^2 - 8x + 16 = 8y$$

$$x^2 - 8x - 8y + 16 = 0$$

Ejercicios diversos:

1. Aplicando la definición hallar la ecuación de la parábola de directriz $Ld : x+1=0$ y Foco $F(5,3)$

2. Hallar la ecuación, los elementos y graficar la parábola de $V(0,0), F(-5,0)$

3. Hallar la ecuación, los elementos y graficar la parábola de $V(-1,-2), LR=12$, eje focal vertical, hacia abajo.

4. Hallar la ecuación, los elementos y graficar la parábola de $V(3,-2)$, extremos del lado recto en los puntos

$$M\left(-2, \frac{1}{2}\right) \text{ y } M'\left(8, \frac{1}{2}\right)$$

5. Reducir a la forma ordinaria, hallar elementos y graficar la parábola $y^2 + 4x + 12y + 16 = 0$

Soluciones:

1. $y^2 - 12x - 6y + 33 = 0$

2. $y^2 + 20x = 0, Ld : x = 5, LR = 20$

3. $x^2 + 2x + 12y + 25 = 0$

4. $x^2 - 6x - 10y - 11 = 0$

5. $V(2,3), F\left(\frac{9}{4}, 3\right), LR = 1$

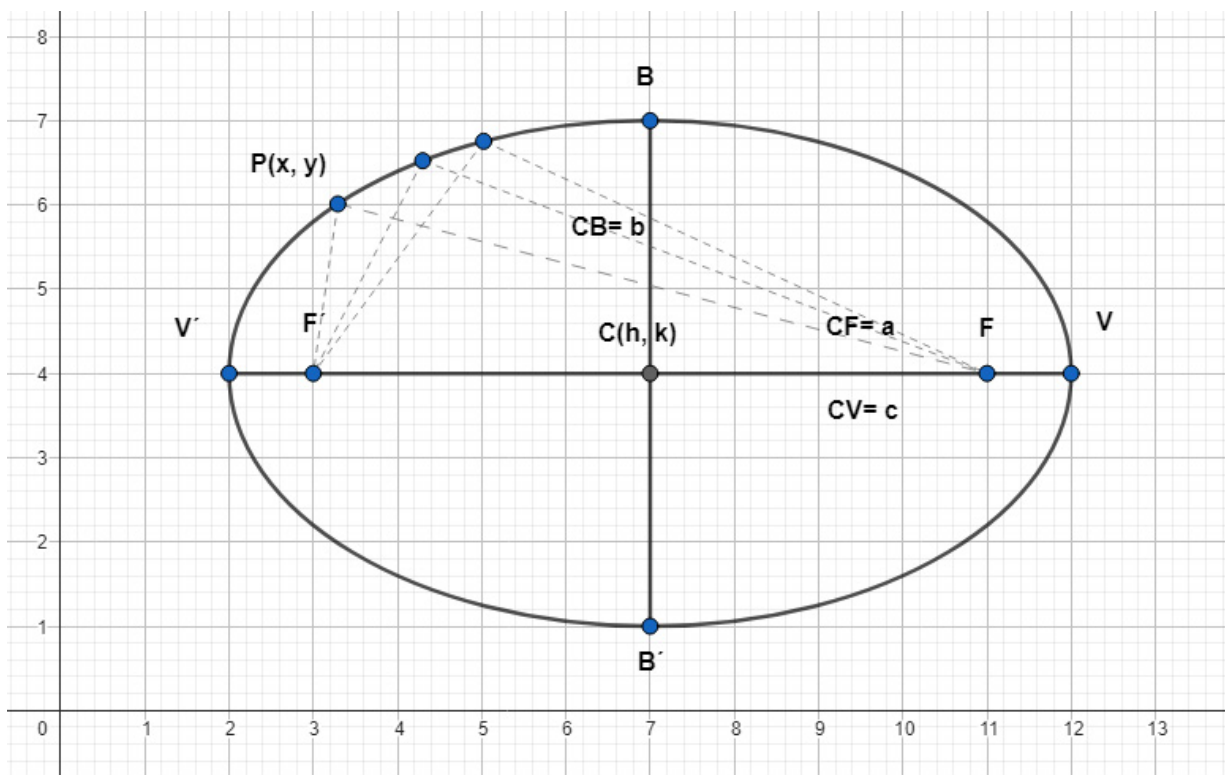
ELIPSE

Una elipse se define como el conjunto de los puntos cuyas distancias a dos puntos fijos llamados focos tienen una suma constante.

$$PF + PF' = 2a$$

Donde P es un punto cualquiera (x,y) y $2a$ es el **eje mayor** o la suma de las distancias del punto a los focos.

Al segmento de recta que une los focos se le llama **eje focal "2c"**. El punto medio entre los focos es el **centro** de la elipse y los puntos en los que la elipse corta al eje focal son los **vértices**. A la distancia o cuerda entre ambos vértices se le llama **semieje mayor "a"** y la cuerda que corresponde al ancho de la curva a la altura del centro se le llama **semieje menor "b"**.



En la figura, los focos son F y F' , los vértices son V y V' y los extremos de semieje menor son B y B' . Enfatizando, las distancias significativas son el **semieje focal "c"**, el **semieje mayor "a"** y el **semieje menor "b"** y la relación pitagórica entre ellas es $a^2 = b^2 + c^2$. Como $a > c$, la excentricidad de una elipse es: $e = \frac{c}{a} < 1$.

Por medio de la definición se llega a las siguientes ecuaciones en forma canónica de una elipse, con centro en un punto cualquiera $C(h, k)$, con semiejes mayor y menor a y b respectivamente.

Dirección del eje focal	$C(h, k)$	$C(0,0)$
Horizontal	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Vertical	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

En forma desarrollada, la ecuación de una elipse cualquiera con eje horizontal o vertical puede tener la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se le puede reconocer porque $A \neq C$ pero tienen el mismo signo.

Ejemplos:

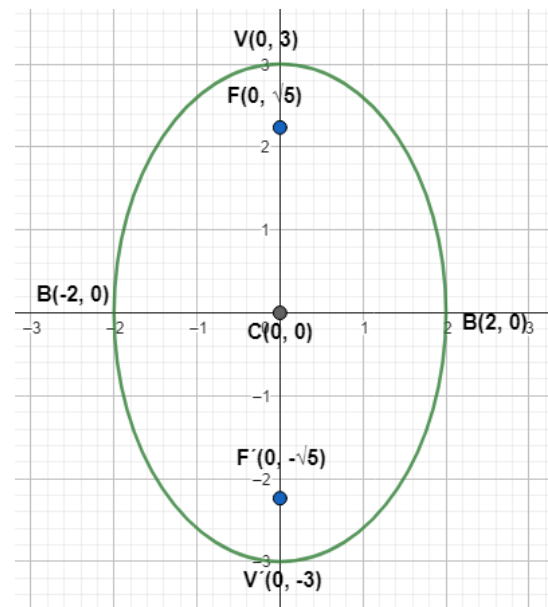
1. Determine los vértices, los focos y grafique la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$

Se dividen ambos lados por el término independiente para buscar semejanza con la forma estándar y reduciendo factores comunes:

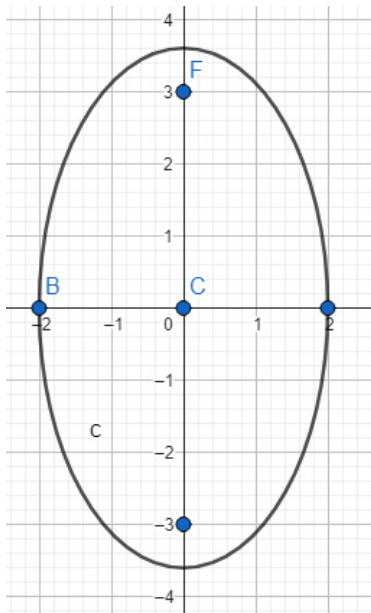
$$\begin{aligned} \frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} &= \frac{36}{36} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Comparando con la forma estándar se puede ver que es una elipse vertical con semieje mayor $a = 3$, semieje menor $b = 2$. Para obtener el semieje focal se despeja de la relación pitagórica y se obtiene $c^2 = a^2 - b^2$; $c = \sqrt{9 - 4}$; $c = \sqrt{5}$

En síntesis: $C(0,0), F(0, \pm\sqrt{5}), V(0, \pm 3), B(\pm 2, 0), e = \frac{\sqrt{5}}{3}$



2. Determinar la ecuación de una elipse de focos en $(0, -3)$ y $(0, 3)$ y eje menor de longitud 4.



El centro está en el punto medio de los focos $C(0,0)$

El eje focal es $CF = 6$; el semieje focal es $c = 3$

El eje menor $BB' = 4$, el semieje menor $b = 2$

El semieje mayor $a = \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4}$; $a = \sqrt{13}$

Los focos se alinean verticalmente, por lo tanto, la ecuación es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$$

$$\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1 \right] (4)(13); 13x^2 + 4y^2 - 52 = 0$$

3. Determinar la ecuación de la elipse que tiene su centro en $C(3, -1)$, un foco en $F(6, -1)$ y un vértice en $V(8, -1)$, sus elementos y graficar.

Trazando estos puntos y por simetría, se ve una elipse horizontal con semieje focal $c = 3$, semieje mayor $a = 5$ y dados ambos, el semieje menor es:

$$a^2 = b^2 + c^2 ; c = \sqrt{a^2 - b^2}; c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}; b = 4$$

$$e = \frac{c}{a}; e = \frac{3}{5}$$

$$LR = \frac{2b^2}{a}; LR = \frac{2(16)}{5} = \frac{32}{5}$$

La ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

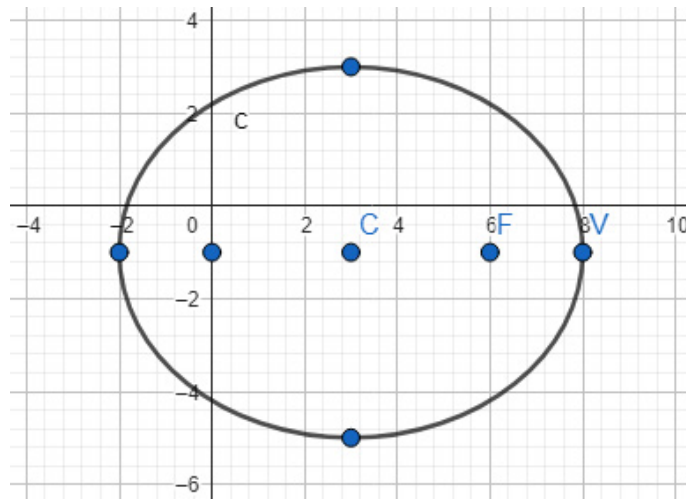
$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

Desarrollando:

$$\left[\frac{x^2 - 6x + 9}{25} + \frac{y^2 + 2y + 1}{16} = 1 \right] (25)(16)$$

$$16(x^2 - 6x + 9) + 25(y^2 + 2y + 1) = 400; 16x^2 - 96x + 144 + 25y^2 + 50y + 25 - 400 = 0$$

$$16x^2 + 25y^2 - 96x + 50y - 231 = 0$$



4. Hallar la ecuación de la elipse vertical con centro en $C(-2, 3)$ y excentricidad y lado recto que valen

$$e = \frac{12}{13} \text{ y } LR = \frac{50}{26}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{12}{13}; 13c = 12a; c = \frac{12}{13}a$$

Con esto no debemos asumir que $c = 12$ y $a = 13$, puesto que la relación pudo haber sido reducida. Para tener certeza calculemos a, b y c usando las demás relaciones conocidas para la elipse:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{50}{26}; b^2 = \frac{50a}{2(26)} = \frac{25a}{26}$$

$$a^2 = b^2 + c^2; a^2 = \frac{25a}{26} + \left(\frac{12}{13}a\right)^2; a^2 - \frac{25}{26}a + \frac{144}{169}a^2 = 0; \frac{25}{169}a^2 - \frac{25}{26}a = 0$$

$$\frac{25}{13}a\left(\frac{a}{13} - \frac{1}{2}\right) = 0; a_1 = 0, a_2 = \frac{13}{2}$$

$$b^2 = \frac{25}{26}\left(\frac{13}{2}\right) = \frac{25}{4}; b = \frac{5}{2}$$

$$c = \frac{12}{13}\left(\frac{13}{2}\right); c = 6$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{169}{4}} = 1; \left[\frac{4(x^2 + 4x + 4)}{25} + \frac{4(y^2 - 6y + 9)}{169} = 1 \right] \bullet (25)(169)$$

$$676(x^2 + 4x + 4) + 100(y^2 - 6y + 9) = 4225$$

$$676x^2 + 2704x + 2704 + 100y^2 - 600y + 900 - 4225 = 0$$

$$676x^2 + 100y^2 + 2704x - 600y - 621 = 0$$

Ejercicios:

1. Aplicando la definición hallar la ecuación de la elipse con $F(3, 8)$, $F'(3, 2)$, eje mayor $EM=10$.

Solución: $25x^2 + 16y^2 - 150x - 160y + 225 = 0$

2. Hallar los elementos y graficar las siguientes elipses:

a) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

Solución: $V(0, \pm 3)$, $B(\pm 2, 0)$, $F(0, \pm \sqrt{5})$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $LR = \frac{8}{3}$

b) $49x^2 + 24y^2 + 490x - 144y + 265 = 0$

Sol:

$C(-5, 3)$, $V(-5, 10)$, $V'(-5, -4)$, $EM = 14$, $B(-5 + \sqrt{24}, 3)$, $B'(-5 - \sqrt{24}, 3)$,

$em = 2\sqrt{24}$, $F(-5, 8)$, $F'(-5, -2)$, $FF' = 10$, $e = \frac{5}{7}$, $LR = \frac{48}{7}$, *ec.eje focal* : $x = -5$, *ec.eje normal* : $y = 3$

3. Hallar en forma general la ecuación de la elipse que cumple:

a) $C(0, 0)$, $V(2, 0)$, $F(\sqrt{3}, 0)$

Solución: $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$

b) $C(-2, 1)$, $B(6, 1)$, $LR = \frac{32}{3}$

Solución: $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y - 536 = 0$

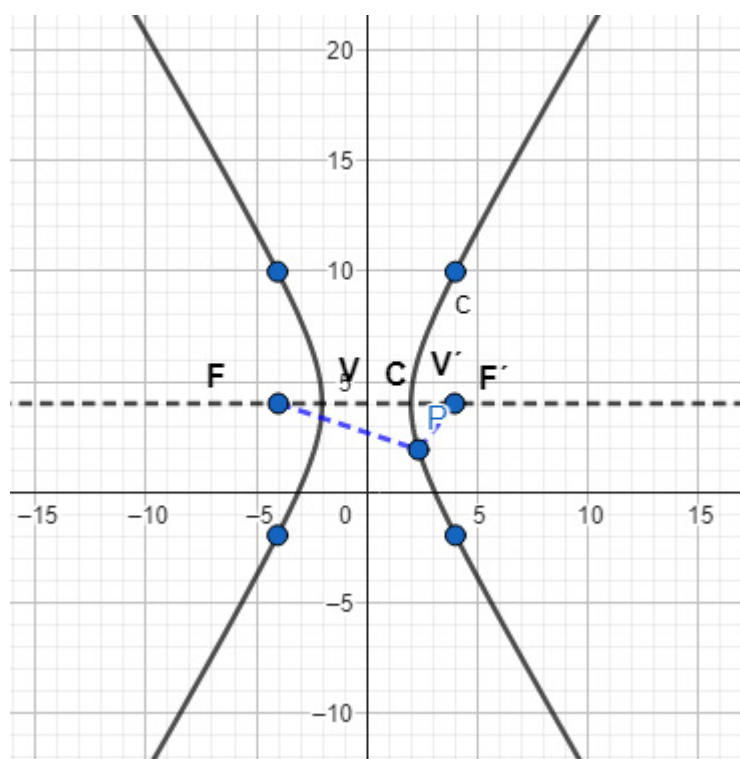
HIPÉRBOLA

Una hipérbola se define como el conjunto de los puntos para los cuales el valor absoluto de su diferencia de distancia a dos puntos fijos llamados focos es constante.

$$|PF - PF'| = 2a$$

Análogamente a la elipse, P es un punto cualquiera (x, y) y $2a$ es el **eje transverso** o el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos.

Al segmento de recta que une los focos se le llama **eje focal "2c"**. El punto medio entre los focos es el **centro** de la hipérbola y los puntos en los que la hipérbola corta al eje focal son los **vértices**. A la distancia o cuerda entre ambos vértices de le llama **eje transverso "2a"** y la cuerda que corresponde al ancho de la curva a la altura del centro se le llama **eje conjugado "2b"**.



En la figura, el centro es "C", los focos son F y F' , los vértices son V y V' . Enfatizando, las distancias significativas son el **semieje focal "c"**, el **semieje transverso "a"** y el **semieje conjugado "b"** y la relación pitagórica entre ellas es $c^2 = a^2 + b^2$. Como $c > a$, el **latus rectum** es $LR = \frac{2b^2}{a}$ la excentricidad de una hipérbola es: $e = \frac{c}{a} > 1$.

Por medio de la definición se llega a las siguientes ecuaciones en forma canónica de una hipérbola, con centro en un punto cualesquiera $C(h, k)$, con semiejes transverso y conjugado a y b respectivamente.

Dirección del eje focal	$C(h, k)$	$C(0, 0)$
Horizontal	$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Vertical	$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

En forma desarrollada, la ecuación de una hipérbola cualquiera con eje real horizontal o vertical puede tener la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se le puede reconocer porque $A \neq C$ y tienen el distinto signo.

Ejemplos:

1. Determine los vértices, los focos y grafique la hipérbola $9x^2 - 4y^2 + 45 = 0$

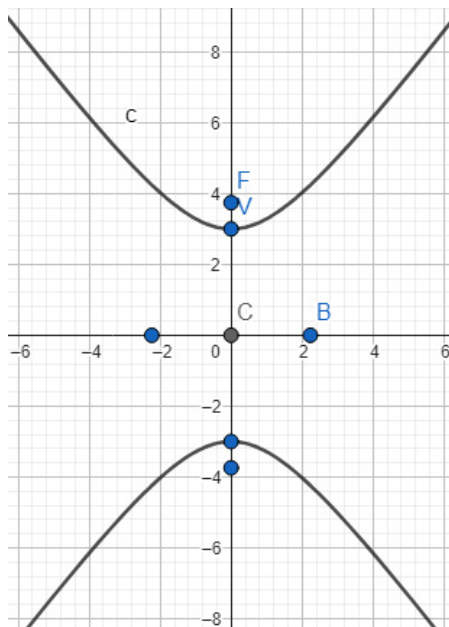
Se transpone el término independiente y dividen ambos lados por el mismo para buscar semejanza con la forma estándar y reduciendo factores comunes:

$$\frac{9x^2}{-45} - \frac{5y^2}{-45} = -\frac{45}{-45}$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{5} = 1$$

Comparando con la forma estándar se puede ver que es una hipérbola vertical con semieje real $a = 3$, semieje imaginario $b = \sqrt{5}$. Para obtener el semieje focal se usa la relación pitagórica y se obtiene $c^2 = a^2 + b^2; c = \sqrt{9 + 5}; c = \sqrt{14}$

En síntesis: $C(0, 0), F(0, \pm\sqrt{14}), V(0, \pm 3), B(\pm\sqrt{5}, 0), e = \frac{\sqrt{14}}{3}$



2. Aplicando la definición hallar la ecuación de la hipérbola que cumple $F'(3, -4), F(3, 6)$ y $K = 6$

$$|PF - PF'| = 2a$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = 6$$

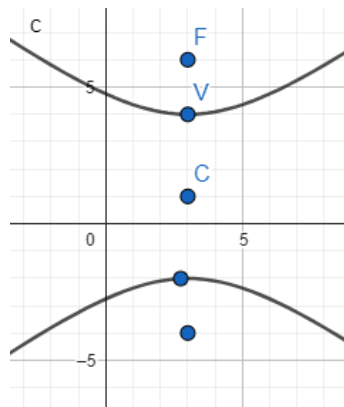
$$(\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2})^2 = (6 + \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2})^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 36 + 12\sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36$$

$$12\sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = 20y - 56; (3\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36})^2 = (5y - 14)^2$$

$$9x^2 - 54x + 81 + 9y^2 - 108y + 324 = 25y^2 - 140y + 196$$

$$9x^2 - 16y^2 - 54x + 32y + 209 = 0$$



3. Hallar los elementos y graficar la hipérbola $4x^2 - 12y^2 - 16x - 72y - 44 = 0$

$$(4x^2 - 16x) - (12y^2 + 72y) = 44$$

$$4(x^2 - 4x + 4) - 12(y^2 + 6y + 9) = 44 + 16 - 108$$

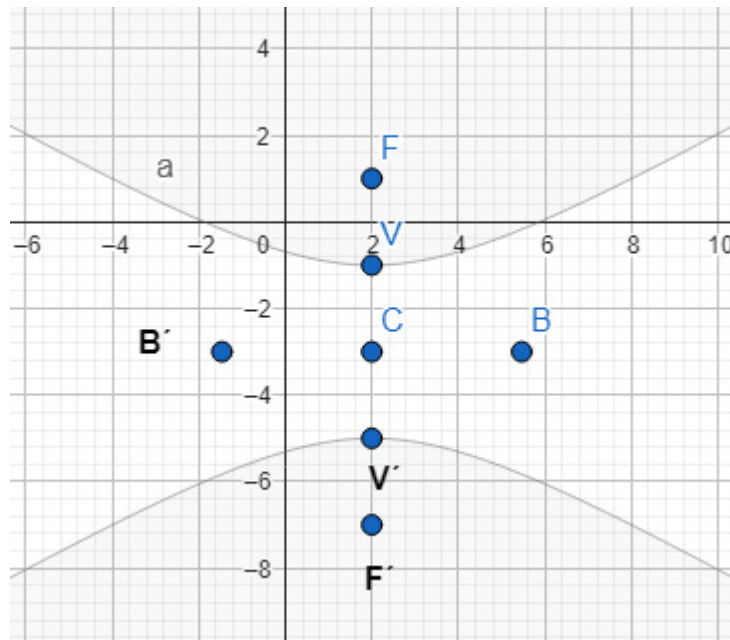
$$[4(x-2)^2 - 12(y+3)^2 = -48] \left(-\frac{1}{48}\right)$$

$$-\frac{(x-2)^2}{12} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1; \frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{12} = 1$$

Hipérbola vertical con $C(2, -3), a^2 = 4; a = 2, b^2 = 12; b = 2\sqrt{3}, c^2 = 4 + 12 = 16; c = 4$

$$F(2, -7), F'(2, 1), V(2, -5), V'(2, -1), B(2 + 2\sqrt{3}, -3), B'(2 - 2\sqrt{3}, -3)$$

$$e = \frac{4}{2} = 2, LR = \frac{2(12)}{2} = 12, ET = 4, EC = 4\sqrt{3}, EF = 8$$



4. Hallar la ecuación de la hipérbola de $C(-4, 3), F(-4, 7), e = 2$

$$c = 4, \frac{c}{a} = 2; \frac{4}{2} = a; a = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2; 16 = 4 + b^2; b^2 = 12; b = 2\sqrt{3}$$

Hipérbola vertical

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{12} = 1; \left[\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{12} = 1 \right] 12$$

$$3(y^2 - 6y + 9) - (x^2 + 8x + 16) = 12$$

$$3y^2 - 18y + 27 - x^2 - 8x - 16 - 12 = 0$$

$$3y^2 - x^2 - 8x - 18y + 15 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 - 3y^2 + 8x + 18y - 15 = 0$$

Ejercicios:

1. Aplicando la definición hallar la ecuación de la hipérbola que cumple $F'(-2,0), F(2,0)$ y $k = 2$

Solución: $3x^2 - y^2 - 3 = 0$

2. Hallar los elementos y graficar la hipérbola $4x^2 - 9y^2 - 24x + 18y + 63 = 0$

Solución: $C(3,1), V(3,3), V'(3,-1), B(6,1), B'(0,1), e = \frac{\sqrt{13}}{2}, LR = 9, F(3,1 + \sqrt{13}), F'(3,1 - \sqrt{13})$
 $ET = 4, ec = 6, FF' = 2\sqrt{13}$

3. Hallar en forma general la ecuación de la hipérbola que cumple:

a) $F(0,5), ec = 4, C(0,0)$

Solución: $21x^2 - 4y^2 + 84 = 0$

b) $C(0,0)$, eje *transverso* sobre el eje x , $LR = \frac{2}{3}$ y pasa por $(-1,2)$

Solución: $y^2 - 3x^2 - 1 = 0$

Manual de álgebra de Luis Enrique Olea Osuna, versión electrónica generada en julio del 2025 por el equipo editorial de Publicar al Sur en la Ciudad de México. En su composición se usaron fuentes de la familia ITC Avant Garde Gothic Pro, Ebrima y Segoe UI.



Quienes trabajamos impartiendo las asignaturas de cálculo diferencial e integral, frecuentemente enfrentamos el problema de que nuestros alumnos llegan con carencias significativas en cuanto a sus habilidades para el dominio de las operaciones con números reales de todo tipo, y para el conocimiento y manejo del lenguaje matemático formal, en especial en los temas de aritmética, álgebra, trigonometría y geometría analítica.

El presente material está elaborado precisamente para atender a esta problemática; contiene los fundamentos de teoría de los temas de matemáticas mencionados, tratados en forma somera, pero con la formalidad necesaria para que los alumnos puedan integrar ese vocabulario a su acervo y eventualmente usarlo para expresar sus dudas, o argumentar y justificar los procedimientos que realice.

Es de utilidad para todos los profesores y alumnos que están por cursar cálculo diferencial e integral, contiene además de la teoría, elementos gráficos, ejemplos resueltos, ligas a recursos adicionales como videos o animaciones para favorecer la comprensión de los temas, algunos ejercicios de práctica para reforzamiento e incluso actividades de auto evaluación para que los alumnos puedan monitorear su propio nivel de dominio.

Este material en su primera edición puede ser buen apoyo didáctico-práctico para los profesores y para sus alumnos ya que les permitirá encontrar en un solo ejemplar los contenidos que normalmente se encuentran en obras separadas. Además de que el orden de los temas responde a una secuencia ordenada para que al llegar a los temas posteriores integradores se hayan trabajado primero los antecedentes; así mismo, se muestran los ejemplos en todos los temas ordenados por complejidad, lo cual es relevante.

Esperamos que les sea de mucha utilidad.

